Teorema de la Función Implicita (version (1))

Teorema 1. *Considere la función $y = f(x)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0) y que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.*
Entonces $F(x, y) = 0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad de (x_0, y_0), tal que $y_0 = f(x_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $\mathcal{V}$ que pueden calcularse como $y' = f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$, $x \in \mathcal{V}$.

Vamos ahora a probar que f es continua en $(x_0 - h, x_0 + h)$ haciendo ver primero que es continua enx_0 y despues mostrando que es continua en todo $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$
Demostración. Sea $0 < \epsilon < k$. Si se repite el proceso para determinar la funcion f, pero ahora restringidos a un cuadrado más pequeño T, centrado en (x_0, y_0), descrito por

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0 < \epsilon, \quad |y - y_0| < \epsilon|\}$$

obtenemos la misma función pero con dominio restringido a un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta < h$ y con rango contenido en el intervalo $y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon$. Así, por la forma en que es determinada la función f, tenemos que para cualquier $0 < \epsilon < k$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x, si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Por tanto, f es continua en x_0.
Para probar que f es continua en x $\forall\ x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ tómese x_1 en $(x_0 - h, x_0 + h)$ con $x_1 \neq x_0$ y un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para garantizar que el cuadrado

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_1 < \epsilon, \quad |y - y_1| < \epsilon|\}$$

centrado en (x_1, y_1) y donde $y_1 = f(x_1)$ este totalmente contenido en el cuadrado original S, y ademas para todo x tal que $|x - x_1 < \epsilon$, $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Así, repitiendo el proceso para determinar f, ahora restringiendonos a las x que cumplen $|x - x_1 < \epsilon$, encontramos que existe una $0 < \delta_1 < \epsilon$ tal que, para todo x, si $|x - x_1 < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(x_1) < \epsilon$. lo cual quiere decir que f es continua en x_1. Por consiguiente, f es continua en $(x_0 - h, x_0 + h)$ ■
Ahora probaremos que y' es continua en $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ con derivada

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

*Demostración.*Como F tiene parciales continuas en x_0 entonces F es diferenciable en x_0 por lo tanto

$$F((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

tomando $x_0 + h_1 \in I$ y haciendo $y_0 + h_2 = f(x_0 + h_1)$ se tiene

$$F((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = F(x_0 + h_1, f(x_0 + h_2)) = 0$$

también

$$F(x_0, y_0) = 0$$

por lo tanto

$$F(x_0 + h_1, f(x_0 + h_2)) - F(x_0, y_0) = 0$$

esto quiere decir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2) = 0$$

como

$$r(h_1, h_2) = 0 \ \ para \ \ h_1, h_2 \ \ cercanas \ \ a \ \ 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = 0$$

por lo tanto

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

pero $h_2 = \triangle y$ y $h_1 = \triangle x$ por lo tanto

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

haciendo $\triangle y \ \triangle x \ \rightarrow \ 0$ se tiene

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

este mismo razonamiento es valido para $x \in I$. ■

Teorema de la Función Implícita (Versión (2))

Considere la función $F(x, y, z)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0, z_0) y que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Entonces $F(x, y, z) = 0$ se puede resolver para z en términos de x, y y definir así una función $z = f(x, y)$ con dominio en una vecindad de (x_0, y_0, z_0), tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $\mathcal{V}$ que pueden calcularse como

$$\frac{dz}{dx}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y)} \quad \frac{dz}{dy}(x, y) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x, y)}$$

Importante: Este es un resultado que garantiza la existencia de una función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$. Esto es, puede resolverse para z en términos de x, y, pero no nos dice como hacer el despeje.

Ejemplo Sea $f(x,y,z)=x+y+z-ze^z$ entonces $\dfrac{\partial F}{\partial z}=1-e^z(z+1)$ si el punto $P(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3$ es tal que $x_0+y_0+z_0e^{z_0}=0$ y $z\neq 0$ y como $\dfrac{\partial F}{\partial z}\neq 0$. El **T.F.Im.** sugiere que podamos despejar z en términos de x y y y establecer así una función $z=f(x,y)$ con $z_0=f(x_0,y_0)$ de modo que su gráfica en los alrededores de P coincide con $F(x,y,z)=0$. Las parciales de la función f son

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\dfrac{-\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-1}{1-e^z(z+1)},\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\dfrac{-\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}=\frac{-1}{1-e^z(z+1)}.$$

Ejercicio Si

$$\frac{dz}{dx}(x,y)=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y)}$$

calcular

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Solución tenemos que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial z}(x,y)}\right)=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\frac{dz}{dx}\right]-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}\right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

$$=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\frac{dz}{dx}\right]-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{dz}{dx}\right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

$$=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\right]-\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right)\right]}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$$

$$=-\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z}+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}$$

Teorema de la Función Implícita **(Versión (3))**

Teorema 2. *Considere la función $z=f(x_1,\ldots,x_n)$. Sea $p=(x_1,\ldots,x_n,y)\in\mathbb{R}^{n+1}$ un punto tal que $F(p)=0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x_i}$, $i=1,\ldots,n$, y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola con centro P y que $\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.*

Entonces, $F(x_1,\ldots,x_n)=0$ puede resolverse para y en términos de x y definir así una vecindad v de

$\mathbb{R}^n$ del punto $(x_1,\ldots,x_n)$, una función $y = f(x_1,\ldots,x_n)$ lo cual tiene derivadas parciales continuas en v que se pueden calcular con las fórmulas

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\dfrac{-\partial F}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_1,\ldots,x_n)} \quad \textit{con } (x_1,\ldots,x_n) \in v.$$

Demostración.

Una idea de como probar lo anterior es la siguiente:
Como $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ entonces tenemos que $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ ó $\frac{\partial F}{\partial y} < 0$ supongamos sin perdida de generalidad que $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ entonces tenemos que $F(x_1, x_2, \ldots, x_q, y)$ es creciente cuando $(x_1, \ldots, x_q)$ es constante $F(a_1, \ldots, a_q, y)$ es creciente $\forall y \in [b-\epsilon, b+\epsilon]$ ademas se tiene que $F(a_1, \ldots, a_q, b) = 0$ entonces

$$F(a_1, \ldots, a_q, b+\epsilon) > 0 \quad F(a_1, \ldots, a_q, b-\epsilon) < 0$$

$\therefore$ Si $(x_1, \ldots, x_q) \in B_\delta(a_1, \ldots, a_q)$ entonces

$$F(x_1, \ldots, x_q, b+\epsilon) > 0 \quad F(x_1, \ldots, x_q, b-\epsilon) < 0 \quad y \quad F \quad \textit{continua}$$

se tiene entonces que $\exists! \quad y = f(x_1, \ldots, x_q) \in [b-\epsilon, b+\epsilon]$ tal que $F(x_1, x_2, \ldots, x_q, f(x_1, x_2, \ldots, x_q)) = 0$ y $b = f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$. Hemos encontrado que si $(x_1, \ldots, x_q) \in B_\delta(a_1, \ldots, a_q)$ entonces $f(x_1, \ldots, x_q) = y \in (b-\epsilon, b+\epsilon)$ $\therefore$ f es continua.

■