Ejemplo Se da el nivel cero de una función diferenciable $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ y un punto P perteneciente a este nivel. Diga en cada caso si en los alrededores del punto p es posible ver la gráfica de F como la gráfica de una función diferenciable del tipo

$$a)\quad u=u(x,y,z)$$

$$b)\quad z=z(x,y,u)$$

$$c)\quad y=y(x,u,z)$$

$$d)\quad x=x(y,z,u)$$

para $x^2+y^2+z^2+u^u=4$ en $p=(1,1,1,1)$

Solución En este caso para todos los incisos podemos definir $f(x,y,z,u)=x^2+y^2+z^2+u^u-4=0$ y para el inciso a, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial u}=2u\mid_{(1,1,1,1)}=2\neq 0$$

por lo tanto es posible ver a la gráfica de F como una función diferenciable del tipo $u=u(x,y,z)$ y sus derivadas parciales seran:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1,1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial u}\mid_{(1,1,1,1)}}=-\frac{2x}{2u}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,1,1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial u}\mid_{(1,1,1,1)}}=-\frac{2y}{2u}=-1$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(1,1,1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial u}\mid_{(1,1,1,1)}}=-\frac{2z}{2u}=-1$$

para el inciso b, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial z}=2z\mid_{(1,1,1,1)}=2\neq 0$$

por lo tanto es posible ver a la gráfica de F como una función diferenciable del tipo $z=z(x,y,u)$ y sus derivadas parciales seran:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1,1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}=-\frac{2x}{2z}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1,1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}=-\frac{2y}{2z}=-1$$

$$\frac{\partial z}{\partial z}(1,1,1,1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}=-\frac{2u}{2z}=-1$$

para el inciso c, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y\mid_{(1,1,1,1)}=2\neq 0$$

por lo tanto es posible ver a la gráfica de F como una función diferenciable del tipo $y = y(x, z, u)$ y sus derivadas parciales seran:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1,1,1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial y}\mid_{(1,1,1,1)}} = -\frac{2x}{2y} = -1$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}(1,1,1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial y}\mid_{(1,1,1,1)}} = -\frac{2z}{2y} = -1$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}(1,1,1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial y}\mid_{(1,1,1,1)}} = -\frac{2u}{2y} = -1$$

para el inciso d, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x\mid_{(1,1,1,1)} = 2 \neq 0$$

por lo tanto es posible ver a la gráfica de F como una función diferenciable del tipo $x = x(y, z, u)$ y sus derivadas parciales seran:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(1,1,1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial x}\mid_{(1,1,1,1)}} = -\frac{2x}{2y} = -1$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}(1,1,1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial x}\mid_{(1,1,1,1)}} = -\frac{2z}{2y} = -1$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}(1,1,1,1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial u}\mid_{(1,1,1,1)}}{\frac{\partial F}{\partial x}\mid_{(1,1,1,1)}} = -\frac{2u}{2y} = -1$$

Teorema de la Función Implicita (version (4))

Consideremos ahora el sistema

$au + bv - k_1x = 0$
$cu + dv - k_2y = 0$

con a, b, c, d, k_1, k_2 constantes. Nos preguntamos cuando podemos resolver el sistema para u y v en términos de x y y. Si escribimos el sistema como

$au + bv = k_1x$
$cu + dv = k_2y$

y sabemos que este sistema tiene solución si $det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ en tal caso escribimos

$$u = \frac{1}{det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}(k_1dx - k_2by), \qquad v = \frac{1}{det\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}(k_2ay - k_1cx).$$

Esta solución no cambiaria si consideramos

$au + bv = f_1(x, y)$
$cu + dy = f_2(x, y)$

donde f_1 y f_2 son funciones dadas de x y y. La posibilidad de despejar las variables u y v en términos de x y y recae sobre los coeficientes de estas variables en las ecuaciones dadas.

Ahora si consideramos ecuaciones no lineales en u y v escribimos el sistema como

$g_1(u, v) = f_1(x, y)$
$g_2(u, v) = f_2(x, y)$

nos preguntamos cuando del sistema podemos despejar a uy v en términos de x y y. Mas generalmente, consideramos el problema siguiente, dadas las funciones F y G de las variables u, v, x, y nos preguntamos cuando de las expresiones

$F(x, y, u, v) = 0$
$G(x, y, u, v) = 0$

podemos despejar a u y v en términos de x y y en caso de ser posible diremos que las funciones $u = \varphi_1(x, y)$ y $v = \varphi_2(x, y)$ son funciones implícitas dadas. Se espera que $\exists'$n funciones $u = \varphi_1(x, y)$ y $v = \varphi_2(x, y)$ en

$F(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$
$G(x, y, \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$

con (x, y) en alguna vecindad V.

Suponiendo que existen φ_1 y φ_2 veamos sus derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial G}{\partial x}$$

Lo anterior se puede ver como un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial x}$. Aquí se ve que para que el sistema tenga solución

$det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$ en (P) (el *det* Jacobiano) y según la regla de Cramer

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\det \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & -\dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & -\dfrac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}}{det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} \qquad \text{(con los dos } det \text{ Jacobianos).}$$

Analogamente si derivamos con respecto a y obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial y}$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\det \begin{vmatrix} -\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}{det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & -\dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & -\dfrac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}} \qquad \text{(con los dos } det \text{ Jacobianos).}$$

Al determinante $det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$ lo llamamos Jacobiano y lo denotamos por $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

Teorema de la Función Implícita (Versión 4)

Teorema 1. *Considere las funciones $z_1 = F(x,y,u,v)$ y $z_2 = G(x,y,u,v)$. Sea $P = (x,y,u,v) \in \mathbb{R}^4$ un punto tal que $F(P) = G(P) = 0$. Suponga que en una bola $B \in \mathbb{R}^4$ de centro P las funciones F y G tienen (sus cuatro) derivadas parciales continuas. Si el Jacobiano $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(P) \neq 0$ entonces las expresiones $F(x,y,u,v) = 0$ y $G(x,y,u,v) = 0$ definen funciones (implícitas) $u = \varphi_1(x,y)$ y $v = \varphi_2(x,y)$ definidas en una vecindad v de (x,y) las cuales tienen derivadas parciales continuas en v que se pueden calcular como se menciona arriba.*

Demostración. Dado que

$$det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces $\dfrac{\partial F}{\partial u}(p)$, $\dfrac{\partial F}{\partial v}(p)$, $\dfrac{\partial G}{\partial u}(p)$, $\dfrac{\partial G}{\partial v}(p)$ no son cero al mismo tiempo, podemos suponer sin perdida de generalidad que $\dfrac{\partial G}{\partial v}(p) \neq 0$. Entonces la función $z_1 = G(x,y,u,v)$ satisface las hipótesis del T.F.I y en una bola abierta con centro p, v se puede escribir como $v = \psi(x,y,u)$.
Hacemos ahora

$$H(x,y,u) = F(x,y,u,\psi(x,y,u))$$

y tenemos que

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}$$

por otro lado

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial v}}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial v}\left(-\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial v}}\right) = \frac{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u}}{\frac{\partial G}{\partial v}} \neq 0$$

por lo tanto para $H(x,y,u) = 0$ tenemos que existe una función $u = \varphi_1(x,y)$ y por lo tanto $v = \psi(x,y,u) = \psi(x,y,\varphi_1(x,y,u)) = \varphi_2(x,y)$ y por tanto u,v se pueden expresar en términos de x,y en una vecindad de p. ■

Ejemplo Analizar la solubilidad del sistema

$$e^u + e^v = x + ye$$

$$ue^u + ve^v = xye$$

Solución En este caso definimos

$$F(x,y,u,v) = e^u + e^v - x - ye = 0$$

$$G(x,y,u,v) = ue^u + ve^v - xye = 0$$

por lo que el sistema tendra solución si $\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$

En este caso

$$\det \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} e^u & e^v \\ ue^u + e^{e^u} & ve^v + e^v \end{vmatrix} = e^u\left(ve^v + e^v\right) - e^v\left(ue^u + e^u\right) = ve^{u+v} - ue^{v+u} \neq 0$$

por lo tanto u y v se pueden ver en términos de x,y $\therefore$ se pueden calcular sus parciales en $u = 0,\ v = 1,\ x = 1,\ y = 1$ que es este caso dan

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\det \begin{vmatrix} -1 & -ye \\ e^v & ve^v + e^v \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-(ve^v + e^v) + e^v ye}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} \mid_{(1,1,1,1)} = \frac{2e - e^2}{e} = 2 - e$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\det \begin{vmatrix} e^u & ue^u + e^u \\ -1 & -ye \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-ye^u e + ue^u + e^u}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} \mid_{(1,1,1,1)} = \frac{e - 1}{e} = 1 - e^{-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\det \begin{vmatrix} -e & -xe \\ e^v & ve^v + e^v \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-e(ve^v + e^v) + e^v xe}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} \mid_{(1,1,1,1)} = \frac{e^2 + e^2 - e^2}{e} = e$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\det \begin{vmatrix} e^u & ue^u + e^u \\ -e & -xe \end{vmatrix}}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} = -\frac{-e^u xe + e(ue^u + e^u)}{ve^{u+v} - ue^{v+u}} \mid_{(1,1,1,1)} = \frac{e - e}{e} = 0$$