Aplicaciones de funciones vectoriales

Definición 1. *Sea C una curva descrita por una función vectorial continua $f(t)$. Si existe la derivada $f'(t)$ y no es nula, la recta que pasa por $f(t)$ y paralela a $f'(t)$ se llama tangente a C en $f(t)$. El vector $f'(t)$ se denomina vector tangente C en $f(t)$.*

Supongamos que una partícula se mueve en el espacio de 2 ó 3 dimensiones de modo que su posición en el instante t referida a un cierto sistema coordenado venga dado por un vector $r(t)$. Cuando t varía en un intervalo de tiempo, el camino recorrido por la partícula es sencillamente la gráfica de $f(t)$. Asi pues, la función vectorial $f(t)$ nos sirve como modelo matemático para describir el movimiento. A la función vectorial $f(t)$ la llamamos función de posición del movimiento.

Definición: Si $r(t)$ es un vector de posición de una particula que se mueve a lo largo de una curva suave en el espacio, entonces:

a) la velocidad es la derivada de la posición $v(t) = \frac{dr(t)}{dt}$

b) la rapidez es la magnitud de la velocidad $\|v(t)\|$

c) la aceleración es la derivada de la velocidad $a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2r(t)}{dt}$

d) el vector $\dfrac{v(t)}{\|v(t)\|}$ es una dirección de movimiento en el tiempo t.

Ejercicio.-La trayectoria de una particula cumple:

$$r'(t) = \left(1 - 6\operatorname{sen}(3t), \frac{t}{5}\right)$$

Hallar la posición de la particula en $t = 4$ si $r(0) = (4, 1)$
Solución.-En este caso integramos ambos miembros de la igualdad

$$r'(t) = \left(1 - 6\operatorname{sen}(3t), \frac{t}{5}\right) \Rightarrow \int r'(t)\ dt = \int \left(1 - 6\operatorname{sen}(3t), \frac{t}{5}\right) dt \Rightarrow r(t) = \left(t + 2\cos(3t), \frac{t^2}{10}\right) + C$$

$$tenemos\ \ que\ \ r(0) = \left(0 + 2\cos(3(0)), \frac{0^2}{10}\right) + C \Rightarrow r(0) = (2, 0) + C$$

$$La\ \ condición\ \ inicial\ \ nos\ \ dice\ \ r(0) = (4, 1)$$

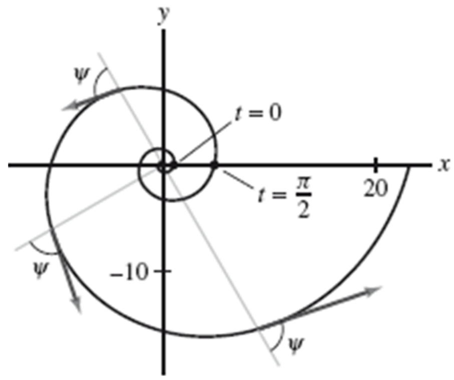
por lo tanto

$$(2, 0) + C = (4, 1) \Rightarrow C = (2, 1)$$

y la posición de la particula en $t = 4$ es

$$r(4) = \left(4 + 2\cos(3(12)), \frac{2^2}{10}\right) + (2, 1) = (7{,}69, 2{,}6)$$

Ejercicio.-Demuestre que la Espiral de Bernoulli de parametrización $r(t) = (e^t cos(4t), e^t \operatorname{sen}(4t))$ tiene la propiedad de que el ángulo ψ entre el vector de posición y el vector tangente es constante. Halle el ángulo ψ en grados



Solución.-tenemos que $r(t) = (e^t cos(4t), e^t \operatorname{sen}(4t))$ de ahí que

$$r'(t) = \left(-4te^t \operatorname{sen}(4t) + e^t \cos(4t), 4e^t \cos(4t) + e^t \operatorname{sen}(4t)\right)$$

y de la fórmula $a \cdot b = \|a\|\|b\| \cos\theta$ se tiene

$$r(t) \cdot r'(t) = \left(e^t cos(4t), e^t \operatorname{sen}(4t)\right) \cdot \left(-4te^t \operatorname{sen}(4t) + e^t \cos(4t), 4e^t \cos(4t) + e^t \operatorname{sen}(4t)\right)$$

$$= -4e^{2t} \operatorname{sen}(4t)\cos(4t) + e^{2t}\cos^2(4t) + 4e^{2t}\operatorname{sen}(4t)\cos(4t) + e^{2t}\operatorname{sen}^2(4t) = e^{2t}\left(\cos^2(4t) + \operatorname{sen}^2(4t)\right) = e^{2t}$$

por otro lado

$$\|r(t)\| = \sqrt{e^{2t}\cos^2(4t) + e^{2t}\sin^2(4t)} = \sqrt{e^{2t}} = e^t$$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\left(-4e^t \operatorname{sen}(4t) + e^t\cos(4t)\right)^2 + \left(4e^t\cos(4t) + e^t \operatorname{sen}(4t)\right)^2}$$

$$= \sqrt{16e^{2t}\operatorname{sen}^2(4t) - 8e^{2t}\operatorname{sen}(4t)\cos(4t) + e^{2t}\cos^2(4t) + 16e^{2t}\cos^2(4t) + 8e^{2t}\cos(4t)\operatorname{sen}(4t) + e^{2t}\operatorname{sen}^2(4t)}$$

$$= \sqrt{16(\cos^2(4t) + \operatorname{sen}^2(4t)) + e^{2t}(cos^2(4t) + \operatorname{sen}^2(4t))} = \sqrt{16e^{2t} + e^{2t}} = \sqrt{e^{2t}(16+1)} = e^t(\sqrt{17})$$

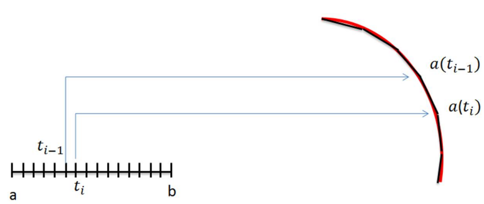
sustituyendo en la fórmula

$$r(t)\cdot r'(t) = \|r(t)\|\|r'(t)\|\cos\psi \Rightarrow e^{2t} = (e^t)(e^t\sqrt{17})\cos\psi \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{17}} = \cos\psi \Rightarrow \psi = cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \Rightarrow \psi = 75{,}96°$$

por lo tanto el ángulo ψ es constante.

Longitud de una curva

Sea $\overline{\alpha} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$, continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $\overline{\alpha'}(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$ y sea $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de $[a,b]$ entonces según la figura se tiene que



$$\ell(\Gamma) \approx \sum_{i=1}^{n} \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\alpha_1(t_i) - \alpha_1(t_{i-1})]^2 + ... + [\alpha_n(t_i) - \alpha_n(t_{i-1})]^2}$$

Recordando el teorema del valor medio

$$\frac{\alpha_i(t_i) - \alpha_i(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} = \alpha'(t*)$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\alpha_1(t_i) - \alpha_1(t_{i-1})]^2 + ... + [\alpha_n(t_i) - \alpha_n(t_{i-1})]^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\alpha_1'(t_1*)(t_i - t_{i-1})]^2 + ... + [\alpha_n'(t_n*)(t_i - t_{i-1})]^2} = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[\alpha_1'(t_1*)]^2 + ... + [\alpha_n'(t_n*)]^2}$$

a medida que $\|P\| \to 0$ se tiene

$$\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[\alpha_1'(t_1*)]^2 + ... + [\alpha_n'(t_n*)]^2} \approx \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \sqrt{[\alpha_1'(t*)]^2 + ... + [\alpha_n'(t*)]^2} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \|\alpha'(t*)\|(t_i - t_{i-1})_{n\to\infty} \to \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Definición 2. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ una curva parametrizable. Sean $a, b \in I$ con $a < b$. Para cualquier partición $P = \{t_0, ..., t_n\}$ del intervalo $[a, b]$ definimos*

$$sup \left\| \sum_{i=1}^{n} \|\alpha'(t)\|(t_i - t_{i-1}) \right\| = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

como la longitud de la curva o la longitud de arco de la curva en caso de que la integral exista

Ejemplo.- Calcular la longitud de arco de $\sigma(t) = (rt - r\operatorname{sen}(t), r - r\cos(t))$
tenemos que $\sigma' = (r - r\cos(t), r\operatorname{sen}(t))$ para $t \in [0, 2\pi]$ $\therefore$ la longitud de arco es:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(r - r\cos(t))^2 + (r\operatorname{sen}(t))^2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 - 2r^2\cos(t) + r^2\cos^2(t) + r^2\operatorname{sen}^2(t)} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{2r^2 - 2r^2\cos(t)} dt = \sqrt{2} r \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos(t)} dt = \sqrt{2} r \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$2r \left(2 \cdot \left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} \right) = 8r$$