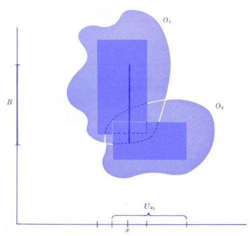
Conjuntos Compactos

Definición. Se dice que un conjunto K es compacto si siempre que esté contenido en la unión de una colección $g = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos, también esta contenido en la unión de algún número finito de conjuntos en g.



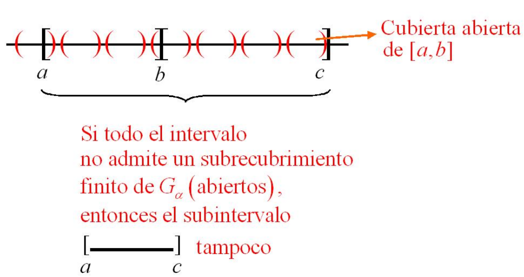
Una colección g de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K con frecuencia se llama cubierta de K. De modo que el requisito para que K sea compacto es que toda cubierta g de K se pueda sustituir por una cubierta finita g de K.

Ejemplo.- Sea $k = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ si $G = \{G_\alpha\}$ es una colección de abiertos tal que $k \subset \{G_\alpha\}$ y si todo punto de k pertenece a algún subconjunto de $\{G_\alpha\}$ entonces cuando más m subconjuntos de $\{G_\alpha\} \supset k$ $\therefore$ k es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo.- Considere al subconjunto $H = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Sea $G_n = (-1, n)$ $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\{G_n | n \in \mathbb{N}\}$ sea una colección de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ cuya union contenga a H. Si $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$ es una subcolección finita de $\{G_n | n \in \mathbb{N}\}$. Sea $M = sup\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ de tal manera que $G_{n_j} \subseteq G_{n_k}$ de aqui deducimos que G_M es la union de $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$. Sin embargo el número real M no pertenece a G_M y por lo tanto no pertenece a $\bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j}$. En consecuencia, ninguna unión finita de $\{G_n | n \in \mathbb{N}\}$ puede contener a H $\therefore$ H no es compacto

Proposición.- Demuestrese que todo intervalo cerrado $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto.

Demostración. Supongamos un recubrimiento abierto de $[a, b]$ tal que no admite subrecubrimiento finito. Entonces tampoco existe un subrecubrimiento finito para $[a, c]$ $[c, b]$ con c punto medio. Entonces tampoco existe un subrecubrimiento finito para $[a, d]$ $[d, c]$ con d punto medio. Sea $I_2 = [a, d]$ el intervalo para el cual no existe el subrecubrimiento finito.



Siguiendo esta construcción obtenemos una sucesión de intervalos anidados

$$I_n = [a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$$

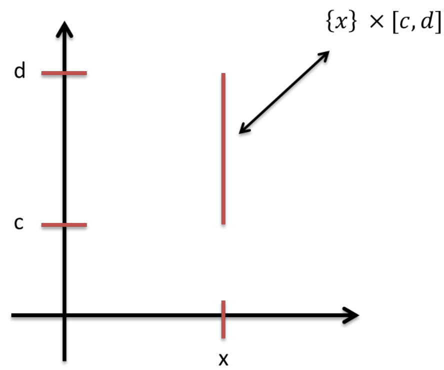
de longitudes $[a_n, b_n] = \frac{b-a}{2^n}$ tales que ninguno de ellos admite un subrecubrimiento finito.

Sea $p = \bigcap [a_n, b_n]$ el punto de intersección p es un punto de acumulación del conjunto $\{[a_n, b_n] \;\; n \in \mathbb{N}\}$ existe entonces $\epsilon > 0$ tal que contiene a p y sea $[p - \varepsilon, p + \varepsilon] \subset U$.

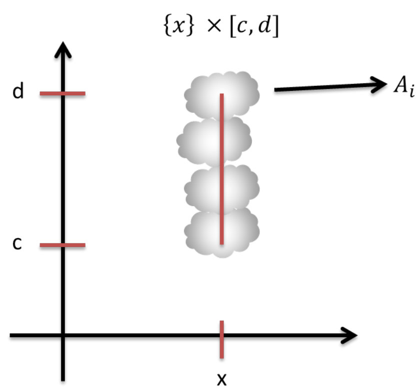
Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > r$, $\frac{b-a}{2^n} < \varepsilon$ y $\forall\, n \geq r$ $[a_n, b_n] \subset U\underset{\circ}{\bigtriangledown}$ ya que ningun $[a_k, b_k]$ admitía un subrecubrimiento finito.

Ejemplo.- Sea $H = (0,1)$ en $\mathbb{R}$. Si $G_n = \{\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\}$ para $n > 0$ entonces la colección $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$ es una subcolección finita de $\{G_n | n > 2\}$. Sea $M = sup\{n_1, ..., n_k\}$ de tal manera que $G_{n_j} \subset G_M$ se ifiere que G_M es la unión de $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$ sin embargo el número real $\frac{1}{m}$ pertenece a H pero no pertenece a G_M $\therefore$ ninguna subcolección finita de $G_n | n > 2$ puede formar una subcolección finita para H $\therefore$ H no es compacto

Teorema. Si $[c, d] \subset \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Demuestre que $\{x\} \times [c, d]$ es compacto.

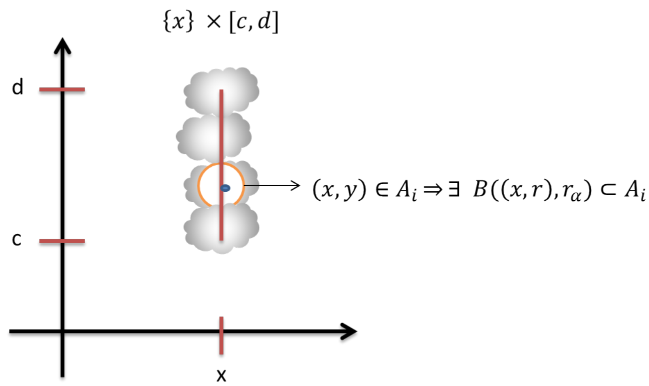


Demostración. Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un recubrimiento abierto de $\{x\} \times [c, d]$; vamos a ver que podemos extraer un subrecubrimiento finito.



Entonces para todo $p = (x, y) \in \{x\} \times [c, d]$ existe $i \in I$ tal que $p \in A_i$ y como A_i es abierto para algún $r_\alpha > 0$ se tiene que

$$(x, y) \subset B((x, y), r_\alpha) \subset A_{i_\alpha}$$



Donde

$$B((x,y),r_\alpha) = (x - r_\alpha, x + r_\alpha) \times (y - r_\alpha, y + r_\alpha)$$

de modo que $\{(y - r_\alpha, y + r_\alpha)\}_{y\in[c,d]}$ es un recubrimiento abierto de $[c,d]$ que, es compacto, admitira un subrecubrimiento finito y

$$[c,d] \subset (y_1 - r_{\alpha_1}, y_1 + r_{\alpha_1}) \bigcup (y_2 - r_{\alpha_2}, y_2 + r_{\alpha_2}) \bigcup \cdots \bigcup (y_n - r_{\alpha_n}, y_n + r_{\alpha_n})$$

y por lo tanto

$$\{x\} \times [c,d] \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{(x - r_{\alpha_j}, x + r_{\alpha_j}) \times (y_j - r_{\alpha_j}, y_j + r_{\alpha_j})\} = \bigcup_{j=1}^{n} B((x,y_j),r_j) \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_{\alpha_j}}$$

con lo que hemos obtenido un subrecubrimiento finito

Teorema. Los subconjuntos cerrados de conjuntos compactos son compactos.

Demostración. Sea F un conjunto cerrado y K un conjunto compacto tal que $F \subset K \subset \mathbb{R}^n$.
Sea $\{G_\alpha\}$ una cubierta abierta de F, entonces $\{G_\alpha\} \cup \{F^c\}$ es una cubierta abierta de K, como K es compacto entonces $\{G_\alpha F^c\}$ tiene subcubierta finita que cubren a F. Podemos quitar F^c y se sigue cubriendo a F.
Así obtenemos un refinamiento finito de cualquier cubierta abierta de F.
$\therefore$ F es compacto.

Teorema. Si $E \subset K \subset \mathbb{R}^n$, donde E es un conjunto infinito y K es compacto, entonces E tiene un punto de acumulaión en K.

Teorema: Heine - Borel . Todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.

1. K compacto implica que K es cerrado.

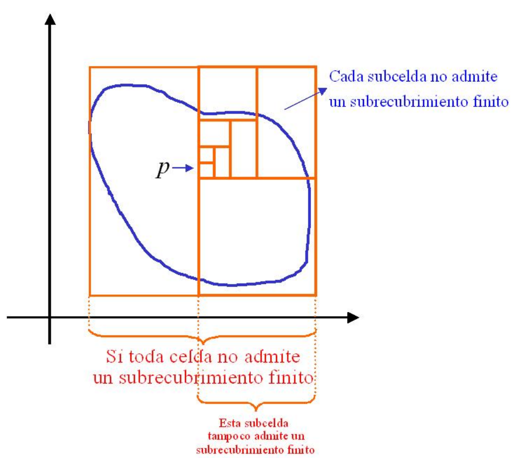
   Demostración: Sea $\bar{x} \in K^c$ y sea $G_m = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - x\| > \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\}$ entonces $y \in ExtB(\bar{x}, \frac{1}{m})$ cada G_m es abierta, la unión de todas las G_m consta de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ excepto x.
   Dado que $x \in K$ cada punto de K pertenece a algún G_m. Debido a la compacidad de K, se

infiere que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{1}^{m} G_i$. Dado que los conjuntos G_m incrementan con $m, K \subset G_m$ de donde la vecindad $\{z \in \mathbb{R}^n | \|z - x\| < \frac{1}{m}\}$ no intercepta a K demostrando que K^c es abierto.
$\therefore$ K es cerrado.

2. K compacto implica K es acotado.

Demostración: Sea $H_m = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < m$ todo el espacio $\mathbb{R}^n$ y por tanto K está contenido en la unión de los conjuntos crecientes, $H_m \quad m \in \mathbb{N}$. Dado que K es compacto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset H_m$ por lo que K esta acotado.

Para completar la demostración de este teorema se necesita probar que si K es un subconjunto cerrado y acotado contenido en la unión de una colección $g = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces está contenido en la unión de algún número finito de conjuntos de g.



Dado que K esta acotado, encontramos un punto de acumulación de K, como K es cerrado $y \in K$ y esta en alguna celda abierta, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada w con $\|y - w\| < \varepsilon$ en la celda abierta y si suponemos que $g = \{G_\alpha\}$ no admite un subrecubrimiento finito llegamos a una contradicción.

Hallamos asi una celda $[a_k, b_k] \times \ldots \times [a_{k_i}, b_{k_i}]$ que esta contenia en una vecindad del punto de acumulación "y" y además $[a_k, b_k] \times \ldots \times [a_{k_i}, b_{k_i}]$ admite un subrecubrimiento finito $\triangledown$