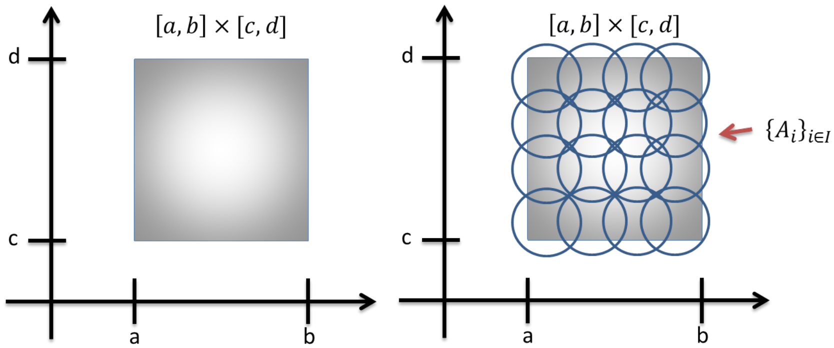
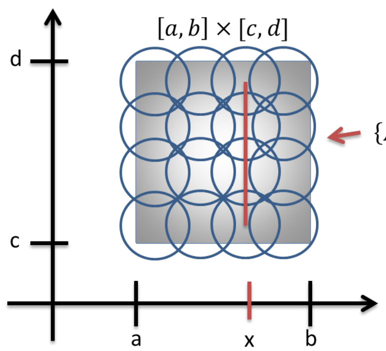
Conjuntos Compactos

Teorema 1. *Un rectángulo* $[a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$ *es un conjunto compacto*

Demostración. Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es un recubrimiento abierto de $[a,b] \times [c,d]$



también es recubrimiento de $\{x\} \times [c,d]$



para cada $x \in [a,b]$ y ya habiamos probado que que existe $r_\alpha > 0$ tal que el conjunto $(x-r_\alpha, x+r_\alpha)\times[c,d]$ admite un subrecubrimiento finito. Pero $\{(x-r_\alpha, x+r_\alpha)\}_{x\in[a,b]}$ es un recubrimiento abierto de de $[a,b]$, que, al ser compacto, admite un subrecubrimiento finito $\{(x_j - r_{\alpha_j}, x_j + r_{\alpha_j})\}_{j=1}^{m}$, entonces tenemos que

$$[a,b] \times [c,d] \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{(x_j - r_{\alpha_j}, x_j + r_{\alpha_j}) \times [c,d]\}$$

y cada uno de los $(x_j - r_{\alpha_j}, x_j + r_{\alpha_j}) \times [c,d]$, esta recubierto por un número finito de elementos de $\{A_i\}$, luego el rectángulo $[a,b] \times [c,d]$ es union finita de elementos de $\{A_i\}_{i\in I}$ $\square$

Teorema 2. $[a,b] \times [c_1,d_1] \times \cdots \times [c_{n-1},d_{n-1}] \subset \mathbb{R}^n$ *es compacto*

Demostración. La demostración es un proceso inductivo del teorema anterior $\square$

Conjuntos Separados

Definición 1. *Dado un espacio métrico (X,d) y dos subconjuntos $A, B \subset X$ diremos que A y B estan separados si*

$$\overline{A} \bigcap B = \emptyset = A \bigcap \overline{B}$$

Ejemplo En $\mathbb{R}^2$ definimos

$$A = ext\ B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\} \quad B = B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

en este caso se tiene

$$\overline{A} = \overline{ext\ B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1\} \quad \overline{B} = \overline{B(0,1)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\therefore \quad \overline{A} \bigcap B = \emptyset = A \bigcap \overline{B}$$

Conjuntos Conexos

Definición 2. *Un conjunto conexo es un subconjunto $G \subset \mathbb{R}^n$ que no puede ser descrito como unión de 2 conjuntos abiertos separados.*

Intuitivamente, un conjunto conexo formado por una sola pieza "que no se puede dividir".
Cuando un conjunto no sea conexo, diremos que es inconexo, disconexo o no conexo.

Teorema 3. *Un intervalo es un conjunto conexo*

Demostración. Sea X un intervalo y supongamos que X es no conexo, entonces $X = A_1 \cup B_1 \quad A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad A_1 \neq B_1 \neq \emptyset$
$A_1 = X \cap A, \quad B_1 = X \cap B$ con A, B abiertos de $\mathbb{R}$ como $A_1 \neq \emptyset \quad \exists a_1 \in A_1$ y como $B_1 \neq \emptyset \quad \exists b_1 \in B_1 \quad a_1 \neq b_1 \quad a_1 < b_1$, sea $a = \sup\{x \in A_1 | a_1 \leq x < b_1\} = \sup\{A_1 \cap [a, b)\}$.

El supremo $\exists$ pues $A_1 \cap [a_1, b)$ esta acotado, además $a \in [a_1, b] \quad \Rightarrow \quad a_1 \leq a \leq b_1 \quad \Rightarrow \quad a \in X$ pues X es un intervalo.

Vamos a ver que $a \notin A_1$ y $a \in B_1$.

a) Si $a \in A_1 \subset A$, entonces $a < b_1$ pues $b_1 \in B$, luego $a \in A \cap (-\infty, b)$
$\Rightarrow \quad \exists \quad \varepsilon > 0$ tal que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset A \cap (-\infty, b) \quad \Rightarrow \quad a < a + \varepsilon < b_1 \quad a + \varepsilon \in X$ pues X es un intervalo
$a + \varepsilon \in X \quad a + \varepsilon \subset A \quad \Rightarrow \quad a + \varepsilon \in A_1 = A \cap X$ y $a_1 \leq a < a + \varepsilon < b_1$
y a no puede ser supremo del conjunto anterior.

b) Si $a \in B_1 \subset B$, entonces $a_1 < a$ pues $a_1 \in A_1$ luego $a \in (a_1, \infty) \cap B$ abierto
$\Rightarrow \quad x \in X$, por ser X un intervalo, luego
$[a - \varepsilon, a] \subset X$ y $a - \varepsilon, a] \subset B \quad \Rightarrow \quad [a - \varepsilon, a] \subset B_1 = X \cap B$
$\Rightarrow \quad a - \varepsilon$ es una cota superior del conjunto anterior $A_1 \cap [a_1, b_1]$ y como $a - \varepsilon < a$ luego a no puede ser el supremo de dicho conjunto. $\square$

Teorema 4. *La totalidad del espacio* $\mathbb{R}^n$ *es conexo.*

Demostración. □

De no ser así, existiríán 2 conjuntos abiertos ajenos no vacíos A, B cuya unión sería $\mathbb{R}^n$.

Sea $x \in A$ y $y \in B$ y considere el segmento S que une a x con y; es decir $S = \{x + t(y - x),\ \ t \in [0, 1]\}$.

Sean $A_1 = \{t \in \mathbb{R} | x + t(y - x) \in A\}$, $\quad B_1 = \{t \in \mathbb{R} | x + y(y - x) \in B\}$.
$A_1 \cap B_1 = \emptyset \quad A_1 \neq \emptyset \neq B_1$ y proporcionan una inconexión de S CONTRADICCIÓN
Ya que el segmento S, se puede ver como un intervalo, y los intervalos son conjuntos conexos.

Teorema 5. *En un espacio métrico* (X, d). X *es un conjunto conexo si y solo si los únicos subconjuntos que son cerrados y abiertos a la vez son* X *y* $\emptyset$

Demostración. Sea $A \subset X$ tal que $A \neq X$ y $A \neq \emptyset$ Supongamos que A es abierto y cerrado a la vez, entonces A^c es abierto y cerrado a la vez $\therefore A \bigcup A^c$ es abierto y $X = A \bigcup A^c$, esto quiere decir que X es union de abiertos separados $\underset{\circ}{\bigtriangledown}$ □