Compactos por Sucesiones

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que para todo recubrimiento abierto $\{A_i\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito es decir $A \subset \bigcup_{i}^{n} A_i$ entonces toda sucesión de puntos de A tiene una subsucesión convergente hacia un punto que pertenece a A*

Demostración. Supongamos que exite una sucesión $\overline{x}_n \in A$ que no tuviera una subsucesión convergente (en este caso $\overline{x}_n$ tiene infinitos elementos). Sea $\overline{x} \in A$ como $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n \neq \overline{x}$, existe $\delta_x > 0$ tal que en la bola abierta $B(\overline{x}, \delta_x)$ solo hay a lo mas un número finito de elementos de $\overline{x}_n$. Entonces la familia de abiertos $\{B(\overline{x}, \delta_x)\}$ es un recubrimiento abierto de A; por hipótesis este recubrimiento admite un subrecubrimiento finito $A_{x_1}, A_{x_2}, ..., A_{x_n}$ de estos abiertos. Por lo tanto los infinitos elementos de $\overline{x}_n$ que estan en A pueden ser cubiertos por un número finito de conjuntos abiertos $\underset{\circ}{\triangledown}$ pues cada A_{x_i} cubre a lo mas un número finito de elementos de A. $\square$

Teorema 2. *Si toda sucesión de puntos de A tiene una subsucesión convergente hacia un punto que pertenece a A entonces A es cerrado y acotado*

Demostración. (A es cerrado) Sea $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{a} \in \partial A$ vamos a ver que $\overline{a} \in A$. Como $\overline{a} \in \partial A$ entonces $\forall\ r > 0\ B(\overline{a}, r) \bigcap A \neq \emptyset$ consideremos ahora $r = \dfrac{1}{n}$ y en cada bola abierta $(\overline{a}, \dfrac{1}{n}$ hay algún punto de A al que podemos llamar $\overline{x}_n$ de esta manera construimos una sucesión de puntos de A que convergen a $\overline{a}$ por lo tanto por hipótesis $\overline{a} \in A$ por tanto A es cerrado
(A es acotado) Si A no fuera acotado, existiria una sucesión $\overline{x}_n$ de puntos de A tal que $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = \infty$ y este límite no estaría en A $\underset{\circ}{\triangledown}$ por tanto A es acotado $\square$

Conjuntos Convexos

Definición 1. *Dados $\overline{x},\ \overline{y}\ \in \mathbb{R}^n$, al segmento rectilineo que une dichos puntos lo denotamos*

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \{t\overline{y} + (1-t)\overline{x} \mid t \in [0,1]\}$$

Definición 2. *Sea $k \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que k es convexo si dados dos puntos de k, el segmento que los une está contenido en k es decir*

$$[\overline{x}, \overline{y}] \subset k \qquad \forall\ \overline{x},\ \overline{y} \in k$$

Ejemplo Una bola abierta es un conjunto convexo

Demostración. Sea $\overline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y consideremos $\overline{x},\ \overline{y}\ \in\ B(\overline{x}_0, \epsilon)$ vamos a ver que $[\overline{x}, \overline{y}] \in\ B(\overline{x}_0, \epsilon)$ tenemos que

$$\overline{x} \in B(\overline{x}_0, \epsilon) \ \Rightarrow\ \|\overline{x} - \overline{x}_0\| < \epsilon \ \ y \ \ \overline{y} \in B(\overline{x}_0, \epsilon) \ \Rightarrow\ \|\overline{y} - \overline{x}_0\| < \epsilon$$

por lo tanto

$$\|[\overline{x}, \overline{y}] - \overline{x}_0\| = \|t\overline{y} + (1-t)\overline{x} - \overline{x}_0\| = \|t(\overline{y} - \overline{x}_0) + (1-t)(\overline{x} - \overline{x}_0)\| \leq t\|\overline{y} - \overline{x}_0\| + (1-t)\|\overline{x} - \overline{x}_0\| <$$

$$t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon \quad \therefore \quad \|[\overline{x},\overline{y}] - \overline{x}_0\| < \epsilon$$

y de esta manera

$$[\overline{x},\overline{y}] \in \ B(\overline{x}_0,\epsilon)$$

□

Ejemplo El cuadrado $A = [-1,1] \times [-1,1]$ es un conjunto convexo

Demostración. Sean $\overline{x} = (x_1,x_2)$, $\overline{y} = (y_1,y_2) \in A$ y $t \in [0,1]$ vamos a ver que $t\overline{y} + (1-t)\overline{x} \in A$ tenemos que

$$t\overline{y} + (1-t)\overline{x} = (ty_1,ty_2) + ((1-t)x_1,(1-t)x_2) = (ty_1 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)x_2)$$

como $x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2$ son tal que

$$-1 \leq x_1 \leq 1, \quad -1 \leq x_2 \leq 1, \quad -1 \leq y_1 \leq 1, \quad -1 \leq y_2 \leq 1$$

entonces

$$-1 \leq t(-1) + (1-t)(-1) \leq ty_1 + (1-t)x_1 \leq t(1) + (1-t)(1) \leq 1$$

$$1 \leq t(-1) + (1-t)(-1) \leq ty_2 + (1-t)x_2 \leq t(1) + (1-t)(1) \leq 1$$

por lo que

$$(ty_1 + (1-t)x_1, ty_2 + (1-t)x_2) \in [-1,1] \times [-1,1]$$

por lo tanto

$$t\overline{y} + (1-t)\overline{x} \in A$$

□

Teorema 3. *Si $\overline{x_1}, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n \in \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos tales que $\bigcap \overline{x_i} \neq \emptyset \ \ \forall i = 1,..,n$ entonces $\bigcap \overline{x_i}$ es un conjunto convexo*

Demostración. Sean $\overline{x},\ \overline{y} \in \bigcap \overline{x_i}$ entonces para todo i se tiene que

$$\overline{x},\ \overline{y} \in \overline{x}_i$$

como $\overline{x}_i$ es convexo entonces $[\overline{x},\overline{y}] \in \overline{x}_i$ para todo i, por lo tanto

$$[\overline{x},\overline{y}] \subset \bigcap \overline{x_i}$$

por lo tanto $\bigcap \overline{x_i}$ es convexo □

Teorema 4. *Un conjunto convexo es conexo*

Demostración. Dado un conjnuto X convexo, si X no fuera conexo entonces existirian A,B conjnutos abiertos separados tales que $X = A\bigcup B$ y $A\bigcap B = \emptyset$ y si consideramos $\overline{x},\ \overline{y} \in X$ entonces el segmento $[\overline{x}, \overline{y}]$ se puede parametrizar como

$$f(t) = t\overline{y} + (1-t)\overline{x} \quad t \in [0,1]$$

y podríamos construir los abiertos

$$\{t \in [0,1] \mid f(t) \in A\} \quad y \quad \{t \in [0,1] \mid f(t) \in B\}$$

estos abiertos proporcionarían una disconexion para el segmento rectilineo $\underset{\circ}{\triangledown}$ pues ya hemos probado que un segmento rectilineo es conexo, por lo tanto X es conexo $\square$