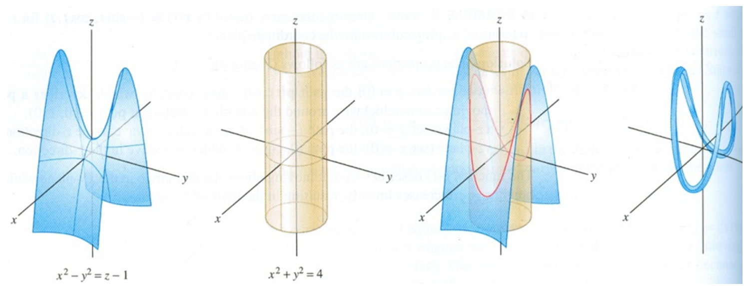
Parametrizando la intersección de superficies

Parametrize la curva obtenida como la intersección de las superficies $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 - y^2 = z - 1$



Solución
Observe que $x^2 + y^2 = 4$ admite la parametrización trigonométrica dada por $x = 2\cos(t)$ y $y = 2\,\mathrm{sen}(t)$ para $0 \leq t \leq 2\pi$. Según la ecuación $x^2 - y^2 = z - 1$ se tiene que

$$z = x^2 - y^2 + 1 = 4\cos^2(t) - 4\,\mathrm{sen}^2(t) + 1 = 4\cos(2t) + 1$$

Así se puede parametrizar la totalidad de la curva mediante una única función vectorial

$$f(t) = (2\cos(t), 2\,\mathrm{sen}(t), 4\cos(2t) + 1) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Continuidad de Funciones Vectoriales

Definición 1. *Sea $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial. Se dice que f es continua en t_0 si y solo si se cumple que*

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

Ejercicio: La función vectorial $f(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ es continua en t_0 si y solo si $x_1, x_2, ..., x_n$ son continuas en t_0.

Demostración. Como $f(t)$ es continua en $t = t_0$, tenemos que se cumple

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

Por otro lado se tiene que

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{t \to t_0} (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} x_1(t), \lim_{t \to t_0} x_2(t), ..., \lim_{t \to t_0} x_n(t) \right)$$

y como $f(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))$ entonces

$$\left(\lim_{t \to t_0} x_1(t), \lim_{t \to t_0} x_2(t), ..., \lim_{t \to t_0} x_n(t) \right) = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))$$

$$\therefore \quad \lim_{t \to t_0} x_1(t) = x_1(t_0) \quad , \quad \lim_{t \to t_0} x_2(t) = x_2(t_0), ..., \lim_{t \to t_0} x_n(t) = x_n(t_0)$$

$\therefore x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ son continuas en $t = t_0$ $\square$

Ejercicio.- Definir la función

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}\hat{\imath} + \cos(t)\hat{\jmath}$$

en $t = 0$ de manera que $f(t)$ sea continua en $t = 0$.

Solución: Tenemos que

$$\lim_{t\to 0} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\hat{\imath} + \cos t\hat{\jmath} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$$

Por lo tanto si definimos $f(0) = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$, entonces

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0)$$

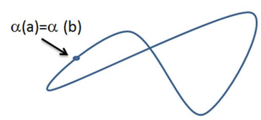
Curvas

Definición 2. *Una función vectorial $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ continua en $I = [a, b]$ se llama trayectoria ó camino.*

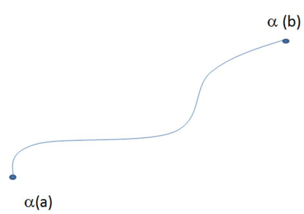
Definición 3. *A la imagen de una trayectoria se le llama curva.*

Definición 4. *Si la función continua $f_I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ esta definida en el intervalo cerrado $I = [a, b]$ diremos que el punto $f(a) \in \mathbb{R}^n$ es el punto inicial del camino o trayectoria f, en tanto que $f(b) \in \mathbb{R}^n$ es el punto final de f.*

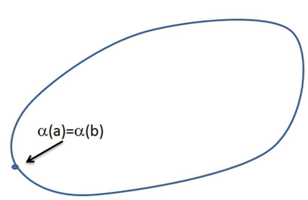
Definición 5. *Una curva cerrada es una curva con la propiedad de que $f(a) = f(b)$, esto es, el punto terminal sobre la curva coincide con el punto inicial.*



Definición 6. *Un arco simple o curva simple es una curva con la propiedad de que $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$, es decir la curva no se cruza a si misma.*



Definición 7. *Una curva cerrada simple o una curva de Jordan es una curva cerrada con la propiedad de que $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$*



Ejercicio.-Demuestre que toda curva del tipo $f(t) = (at + b, ct + d)$ donde a y c son reales no nulos, es simple

Demostración. Para que $f(t)$ sea una curva simple debe ocurrir que $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \ \forall t_1, t_2 \in I$ tenemos que $f(t_1) = (at_1 + b, ct_1 + d)$ y $f(t_2) = (at_2, ct_2 + d) \therefore$

$$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow (at_1 + b, ct_1 + d) = (at_2 + b, ct_2 + d) \Rightarrow at_1 + b = at_2 + b \quad y \quad ct_1 + d = ct_2 + d \Rightarrow t_1 = t_2$$

por lo que f es simple $\square$

Ejercicio.-Demuestre que la curva $f(t) = (t^2 + 1, t^2 - 1)$ no es simple

Demostración. Tenemos que $f(1) = (1^2, 1^2 - 1) = (2, 0) = ((-1)^2 + 1, (-1)^2 - 1) = f(-1)$ pero $1 \neq -1$ por lo que f no es simple $\square$

Derivadas de Funciones Vectoriales

Generalizando un poco las ideas del cálculo diferencial de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Recordemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto t_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

existe y en tal caso lo denotamos $f'(t_0)$

Definición 8. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria definida en un intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$ y $t_0 \in I$. Se define la derivada de f en t_0, denotada por $f'(t_0)$ como*

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

cuando este limite existe

Teorema 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, $t_0 \in \mathbb{R}$. f es diferenciable en el punto t_0 si y solo si cada función componente $x_i(t)$ de f es diferenciable en el punto t_0, en cuyo caso*

$$f'(t_0) = (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t))$$

Demostración. ($\Rightarrow$)
Supongamos que f es diferenciable en t_0. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad \textit{existe}$$

por otro lado

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x_1(t_0 + h), x_2(t_0 + h), ..., x_n(t_0 + h)) - (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \frac{x_2(t_0 + h) - x_2(t_0)}{h}, ..., \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right) =$$

$$\left(\lim_{h\to 0}\frac{x_1(t_0+h)-x_1(t_0)}{h}, \lim_{h\to 0}\frac{x_2(t_0+h)-x_2(t_0)}{h}, ..., \lim_{h\to 0}\frac{x_n(t_0+h)-x_n(t_0)}{h}\right)$$

conforme $h \to 0$ cada limite de las funciónes componentes existe $\therefore$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x_i(t_0+h)-x_i(t_0)}{h} = x_i'(t_0)$$

$\therefore$ cada x_i es diferenciable en t_0

($\Leftarrow$) Se pueden regresar en los pasos de la prueba anterior □

Definición 9. *La derivada $f'(t)$ de una trayectoria f puede ser asociada a una matriz $n \times 1$ la cual es conocida como la matriz Jacobiana de f en el punto t_0*

Se denota

$$Jf(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t_0 \\ x_2'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ x_n'(t_0 \end{bmatrix}$$

Integrales de funciones vectoriales

Definición 10. *Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es una funcion vectorial definida sobre $[a, b]$, entonces* $\displaystyle\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\right)$.

La integral existe siempre que cada una de las integrales $\displaystyle\int_a^b f_i$ con $i = 1, \ldots, n$ existe. En particular, si f es continua sobre $[a, b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ existe.

Teorema 2. *Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es continua sobre un intervalo I y $a \epsilon I$ entonces:*

$$\frac{d\displaystyle\int_a^t f}{dt} = f(t) \quad \forall \quad t \,\epsilon\, I$$

Demostración. La prueba se obtiene por la aplicación del primer teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes

$$\begin{aligned} \frac{d\displaystyle\int_a^t f}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int_a^t f_1, \ldots, \int_a^t f_n\right) \\ &\left(\frac{d}{dt}\int_a^t f_1, \ldots, \frac{d}{dt}\int_a^t f_n\right) \\ &= (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \\ &= f(t) \end{aligned}$$

□

Teorema 3. *Si* $f = (f_1, \ldots, f_n)$ *tiene derivada continua sobre un intervalo* I*, entonces* $\forall \quad a, b \in I$
$\displaystyle\int_a^b f'(t) = f(b) - f(a)$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f' &= \int_a^b (f_1', \ldots, f_n') \\
&= \left(\int_a^t f_1', \ldots, \int_a^t f_n' \right) \\
&= (f_1(b) - f_1(a), \ldots, f_n(b) - f_n(a)) \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

$\square$