Continuidad de Funciones de Varias Variables

Definición 1. *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ siempre que $x \in \Omega$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta$*

Ejemplo Estudiar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tenemos que:

$$0 \leq \frac{\sin^2(x-y)}{|x|+|y|} \leq \frac{|x-y|^2}{|x|+|y|} \leq \frac{|x|^2+|y|^2+2|x||y|}{|x|+|y|} \leq |x|+|y|$$

por lo que se deduce que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$

Proposición 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea x_0 un punto de acumulación de A*
a) f es continuA en x_0
b) $\forall\ \{x_k\} \subset A$ tal que $x_k \to x_0$, se tiene que $f(x_k) \to f(x_0)$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ b)
Supongamos que f es continua en x_0 entonces dada $\epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$$

y si $x_k \to x_0$ para $\delta > 0\ \exists\ N_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k > N_0$ entonces $\|x_k - x_0\| < \delta$ por tanto $\|f(x_k) - f(x_0)\| < \epsilon$ si $k > N_0$ por lo tanto $f(x_k) \to f(x_0)$
(b) $\Rightarrow$ a)
Supongamos que f no es continua en x_0 entonces $\exists\ \epsilon_0 > 0$ tal que $\forall\ \delta > 0$

$$\|x - x_0\| < \delta \ \ \textit{pero} \ \ \|f(x) - f(x_0)\| \geq \epsilon_0$$

en particular para $\delta = \dfrac{1}{k}$ $\quad k = 1, 2, ...$ podemos hallar $x_k \in A$ que cumplan $\|x_k - x_0\| < \dfrac{1}{k}$ pero $\|f(x_k) - f(x_0)\| \geq \epsilon_0$ por lo tanto se tiene una sucesión de puntos de A con $x_k \to x_0$ pero $\cancel{f(x_k) \to f(x_0)}$ $\underset{\circ}{\triangledown}$ $\square$

Definición 2. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos funciones tales que f es continua en $a \in A$ y g es continua en $f(a) = b \in B$. Definimos la composición de g seguida de f como la funcion*

$$g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \quad \textit{dada} \quad \textit{por} \quad g \circ f(x) = g(f(x)) \quad \forall \quad x \in A$$

Corolario 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y $g : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ dos funciones. Si f es continua en $a \in A$ y g es continua en $b = g(a)$ entonces $g \circ f$ es continua en a.*

Demostración. Sea $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de A tales que $x_k \to a$ por el resultado anterior $f(x_k) \to f(a)$.
ahora bien si g es continua en $f(a)$ tenemos $f(x_k) \to f(a)$ por lo tanto $g(f(x_k)) \to g(f(a))$ por lo tanto $g \circ f$ es continua en a □

Definición 3. *Se dice que un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es un entorno del punto x, si existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset V$.*

Definición 4. *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f es continua en x_0 cuando $\forall$ entorno V de $f(x_0)$ existe un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset V$ es decir para cualquier $x \in U$ se cunple $f(x) \in V$*

Definición 5. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si $C \subset \mathbb{R}^m$ se define $f^{-1}(C) = \{x \in A | f(x) \in C\}$.*

Proposición 2. *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua $\Leftrightarrow \forall$ v abierto de $\mathbb{R}^m$ se tiene que $f^{-1}(v)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$*

Demostración. ($\Rightarrow$)Sea v un abierto de $\mathbb{R}^m$ veamos $f^{-1}(v)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\overline{x} \in f^{-1}(v)$ entonces $f(\overline{x}) \in v$ y como v es abierto podemos hallar $\epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subset v$.
Como f es continua en x podemos hallar $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ esto implica que

$$B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \epsilon)) \subset f^{-1}(v)$$

$\therefore$ cada punto x de $f^{-1}(v)$ es punto interior $\therefore$ $f^{-1}(v)$ es abierto
($\Leftarrow$) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Veamos que f es continua en x. Dado $\epsilon > 0$ se tiene que $v = B(f(x), \epsilon)$ es un abierto lo que implica que $f^{-1}(v)$, es un abierto y por lo tanto existe un $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(v)$ esto implica que $f(B(x, \delta)) \subset v$ esto es $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ esto muestra que f es continua en x, y como x es arbitrario en $\mathbb{R}^n$ entonces f es continua en $\mathbb{R}^n$ □

Teorema 1. *Teorema de Conservación de la adherencia Sea (E, d_E), (F, d_F) dos espacios métricos $f : E \to F$ es continua en E si y solo si $\forall$ $A \subset E$ $\;f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

Demostración. Probaremos que si f es continua en E y $a \in \bar{A}$ entonces $f(a) \in \overline{f(A)}$.
Sea $B_F\ (f(a), \epsilon)$ una bola. Por la continuidad en a $\exists$ $B_E(a, \delta)$, tal que, $f(B_E(a, \delta)) \subset B_F(f(a), \epsilon)$, de donde, $f(B_E(a, \delta) \cap A) \subset B_F(f(a), \epsilon)$, ademas, $B_E(a, \delta) \cap A \neq \emptyset$ por ser a un punto adherente de A, luego, $f(B_E(a, \delta) \cap A) \neq \emptyset$ y $f(B_E(a, \delta) \cap A) \subset \underline{f(B_E(a, \delta))} \cap f(a) \subset B_F(f(a), \epsilon) \cap f(A)$, por lo tanto, $B_F(f(a), \epsilon) \cap f(a) \neq \emptyset$, por lo tanto, $f(a) \in \overline{f(A)}$.

Reciprocamente: Si en un punto a la función f no fuera continua $\exists$ bola $B_F(f(a), \epsilon)$ tal que cualquiera que fuera δ se tendría, $f(B_E(a, \delta)) \not\subset B_F(f(a), \epsilon)$, pongamos $A = \{x \in E \mid f(x) \notin B_F(f(a), \epsilon)\}$.
Es claro que $a \in \bar{A}$ puesto que en toda bola $B_E(a, \delta)$ existen puntos de A. Pero por otro lado $f(a) \notin \overline{f(A)}$ pues en la bola $B_F(f(a), \epsilon)$ no existen elementos de $f(A)$.
En consecuencia $f(\bar{A}) \not\subset \overline{f(A)}$ $\underset{\circ}{\bigtriangledown}$ □

Teorema 2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua. Si $k \subset \Omega$ es compacto, entonces $f(k)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{y_k\}$ una sucesión en $f(k)$ tenemos que demostrar que $\{y_k\}$ tiene una subsucesión convergente a un punto $f(k)$. Sea $y_k = f(x_k)$ con $x_k \in k$. Por la compacidad de k, existe una subsucesión $x_{k_n} \to x \in k$. Entonces por la continuidad de f tenemos $y_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(x) \in f(k)$. □

Corolario 2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y $k \subset \Omega$ un compacto. Entonces f es acotada en k ademas existen $x_1, x_2 \in k$ tal que $f(x_1) = \boldsymbol{sup} f(k)$ y $f(x_2) = \boldsymbol{inf} f(k)$.*

Demostración. Por el resultado anterior $f(k)$ es compacto y por tanto cerrado y acotado, por lo tanto f es acotada en k.

Ademas al ser $f(k)$ cerrado se tiene que $\mathbf{inf} f(k) \in f(k)$ y $\mathbf{sup} f(k) \in f(k)$. Luego $\exists\, x_1, x_2 \in k$ tal que $f(x_1) = \mathbf{sup} f(k)$ y ademas $f(x_2) = \mathbf{inf} f(k)$. $\square$

Teorema 3. *Conservación de la conexión.*

Si f es continua en X y X es un conjunto conexo en (E, d_E), entonces $f(x)$ es tambien conexo.

Demostración. Supongamos que $f(x)$ no es conexo. Existiria entonces una partición $f(x) = Y_1 \cup Y_2$ con $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, Y_1, Y_2 abiertos en $f(x)$. Pero por ser f continua en X, las anti-imagenes $X_1 = f^{-1}(Y_1)$, $X_2 = f^{-1}(Y_2)$ son abiertos en X ademas $X = X_1 \cup X_2$ y $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, por lo tanto X seria conexo $\underset{\circ}{\triangledown}$. $\square$