Vector Tangente

Definición 1. *Dada una curva $f(t)$, el vector unitario tangente T es otra función vectorial asociada a la curva, y está definida por:*

$$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \qquad \textit{siempre que } \|f'(t)\| \neq 0.$$

Observese que:

$$\|T(t)\| = \left\| \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \right\| = \frac{1}{\|f'(t)\|} \|f'(t)\| = 1$$

por lo tanto T es de magnitud constante, en cuyo caso se tiene $T \cdot T' = 0$.

Vector Normal Principal

Definición 2. *Si $T' \neq 0$ el vector unitario que tiene la misma dirección que T' se llama Normal Principal a la curva y se designa por $N(t)$. Asi pues $N(t)$ es una nueva función vectorial asociada a la curva y esta dada por la ecuación:*

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \qquad \textit{siempre que} \qquad \|T'(t)\| \neq 0$$

Plano Osculador

Definición 3. *Cuando los dos vectores unitarios T y N están trazados por el punto de la curva $f(t)$, determinan un plano llamado osculador de la curva.*

El plano osculador es el plano que mejor se adapta a la curva en cada uno de sus puntos. Si la curva es plana, el plano osculador coincide con el plano de la curva.

Ejemplo: Consideremos el camino $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por:

$$f(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}} \right)$$

el cual es dos veces diferenciable parametrizado por longitud de arco y que describe una hélice circular en $\mathbb{R}^3$. Obtenga la ecuación del plano osculador en el punto $f(\sqrt{2}\,\pi) = (-1, 0, \pi)$.

Solución. Tenemos que:

$$T(s) = \frac{f'(s)}{\|f'(s)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

y $T(\sqrt{2}\,\pi) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, por otro lado:

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right) =$$

$$= \left(-\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}},\right), -\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

y $N(\sqrt{2}\ \pi) = (1,0,0)$. Ahora realizamos $T(\sqrt{2}\ \pi)$ x $N(\sqrt{2}\ \pi) =$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\left(\frac{1}{2}\right)\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & -\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{-1}{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

al evaluar en $\sqrt{2}\ \pi$ nos queda $(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})$. Por lo tanto la ecuación del plano osculador en $P = (-1, 0, \pi)$ es:

$$(x+1, y, z-\pi) \cdot \left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2}}(y) + \frac{1}{2\sqrt{2}}(z-\pi) = 0$$

$$\Rightarrow y + z = \pi$$

Curvatura

Definición 4. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una camino dos veces diferenciable parametrizado por longitud de arco. Al número $\kappa = \|f''(s)\|$ se le llama curvatura de f es s.*

Ejemplo: Calcule la curvatura en todo punto de la recta $r(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_u, u_3)$ donde $\|u\| = 1$ tenemos:

$$r'(t) = (u_1, u_2, u_3) \qquad \text{y} \qquad \|r'(t)\| = \|u\| = 1$$

Por lo tanto la curva esta parametrizada por longitud de arco Por lo tanto $\kappa = \|r''(t)\| = 0$, por lo tanto $k = 0$.

Ejemplo: Curvatura de una circunferencia. Para un círculo de radio R dado por la ecuación $r(t) = (R\cos t, R\operatorname{sen} t)$ tenemos: La parametrizacion por longitud de arco es:

$$s = \int_0^t \|f'(u)\|du = \int_0^t Rdt = Rt \ \to \ s = Rt \ \Rightarrow \ t = \frac{s}{R}$$

de esta manera se tiene

$$r(t) = r\left(\frac{s}{R}\right) = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

$$r'(s) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) \qquad \text{y} \qquad r''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

Por lo tanto $\kappa = \|r''(s)\| = \dfrac{1}{R}$.
Esto prueba que una circunferencia tiene curvatura constante y el reciproco de la curvatura es el radio de la circunferencia cuando $k(t) \neq 0$, su inverso se denomina radio de curvatura y se designa por ρ.

Circulo Osculador

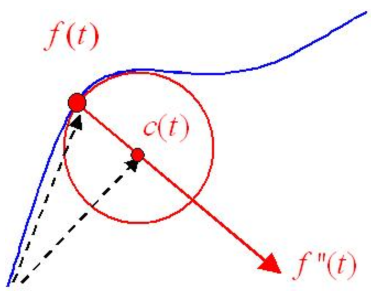
Definición.- El radio de curvatura es $\rho = \frac{1}{k}$ el reciproco de la curvatura, el círculo de curvatura o circulo osculador en un punto P sobre una curva plana donde $k \neq 0$ es el circulo en el plano de la curva que:

i) Es tangente a la curva en P.

ii) Tiene la misma curvaturaque la curva en P.

iii) Se encuentra hacia el lado concavo o interior de la curva.

iv) El radio de la curvatura de la curva P es el radio del círculo de curvatura o círculo osculador.



Obsérvese que el vector $c(t) - f(t)$ es tal que tiene magnitud igual a $r(t)$ radio de la curvatura y su dirección coincide con la de $N(s)$

$\therefore\ c(t) - f(t) = \dfrac{1}{k(t)}N(s) \qquad \therefore\ c(t) = f(t) + \dfrac{1}{k(t)}N(s)$

Asi el centro del círculo osculador (llamado centro de curvatura) debe estar en:

$$c(t) = f(t) + \frac{1}{\kappa}N(t)$$