Diferenciabilidad de Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen constantes $A_1, \quad A_2$ tal que*

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

En la definición anterior si se toma $h = (h_1, 0)$ se tiene

$$f((x_0, y_0) + (h_1, 0)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2(0) + r(h_1, 0)$$

donde

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} - A_1 = \lim_{h_1\to 0} \frac{r(h_1, 0)}{h_1}$$

como

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{r(h_1, 0)}{h_1} = 0$$

se tiene

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} - A_1 = 0$$

en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = A_1$$

En la definición anterior si se toma $h = (0, h_2)$ se tiene

$$f((x_0, y_0) + (0, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1(0) + A_2 h_2 + r(0, h_2)$$

donde

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} - A_2 = \lim_{h_2\to 0} \frac{r(0, h_2)}{h_2}$$

como

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{r(0, h_2)}{h_2} = 0$$

se tiene

$$\lim_{h_0\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} - A_2 = 0$$

en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} = A_2$$

Definición 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ tal que*

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Ejemplo Verificar la diferenciabilidad de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Solución En este caso se tiene que

$$\begin{gathered} f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 \\ f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 \\ \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) h_1 = 2x_0 h_1 \\ \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) h_2 = 2y_0 h_2 \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$(x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0h_1 + 2y_0h_2 + r(h_1, h_2)$$

simplificando se tiene

$$h_1^2+h_2^2 = r(h_1, h_2) \Rightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0$$

por lo tanto f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Derivada Direccional en un punto

Definición 3. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$ la derivada direcional de f en la dirección del vector u, en el punto x_0 denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x_0)$, se define por*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0 + hu) - f(x_0)}{h}$$

Ejemplo Sea $f(x, y) = x^2y$ y sea $u = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ por lo tanto la derivada direccional en (x_0, y_0) es:

$$\lim_{h\to0} \frac{f\left((x_0, y_0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(y_0 + \frac{2h}{\sqrt{5}}\right) - x_0^2y_0}{h} =$$

$$\lim_{h\to0} \frac{\left(x_0^2 + \frac{2x_0h}{\sqrt{5}} + \frac{h^2}{5}\right)\left(y_0 + \frac{2h}{\sqrt{5}}\right) - x_0^2y_0}{h} = \frac{2x_0^2}{\sqrt{5}} + \frac{2x_0y_0}{\sqrt{5}}$$

Si la función es de 2 variables podemos representar el vector u como $u = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\quad \theta \in (0, 2\pi)$ pudiendo expresarse entonces

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h\cos\theta, y_0 + h\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ejemplo: La derivada direcional de $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en la dirección $\theta = \frac{\pi}{4}$ en el origen es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{0 + h\cos\frac{\pi}{4}, 0 + h\sin\frac{\pi}{4} - 0}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3\cos^3\frac{\pi}{4} + h^3\sin^3\frac{\pi}{4}}{\frac{h^2\cos^2\frac{\pi}{4} + h^2\sin^2\frac{\pi}{4}}{h}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3\left[\cos^3\frac{\pi}{4} + h^3\sin^3\frac{\pi}{4}\right]}{\frac{h^2\left[\cos^2\frac{\pi}{4} + h^2\sin^2\frac{\pi}{4}\right]}{h}}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3\left[\cos^3\frac{\pi}{4} + h^3\sin^3\frac{\pi}{4}\right]}{h^3(1)} = \lim_{h\to 0} \cos^3\frac{\pi}{4} + \sin^3\frac{\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nota: La derivada direccional indica la variación d e la función en la dirección de u.

Ejemplo Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ y sea $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario dado, tenemos entonces que la derivada direccional en $(0,0)$ es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(ha)^2(hb)}{(ha)^4+(hb)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3(a^2b)}{h^3(h^2a^4+b^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{(a^2b)}{(h^2a^4+b^2)} = \frac{a^2}{b}$$

Por lo tanto esta función posee derivadas direccionales en todas direcciones. Sin embargo no es continua en $(0,0)$, pues tendría que ocurrir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

pero si nos acercamos al $(0,0)$ por la trayectoria $y = x^2$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2) = \lim_{(x)\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

por lo tanto esta función no es continua en $(0,0)$