Aplicacion del Teorema del Valor Medio de Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Teorema 1. *Suponga que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leq M \quad y \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \leq M$$

donde M no depende de x, y entonces f es continua en A.

Demostración. Sean (x_0, y_0), $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in A$ tenemos entonces que

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) + f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Aplicando teorema del valor medio se tiene que existen θ_1, $\theta_2 \in (0, 1)$ tal que

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2)h_2$$

$$f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + h_2)h_1$$

por lo tanto

$$|f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)| = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2)h_2\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + h_2)h_1\right)\right| \leq$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, y_0 + \theta_2 h_2)\right)\right| |h_2| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + \theta_1 h_1, y_0 + h_2\right)\right|)|h_1| \leq M(|h_2| + |h_1|)$$

si tenemos que $\|(h_1, h_2)\| < \delta$ entonces

$$M(|h_2| + |h_1|) < 2M\delta \quad \therefore \quad \epsilon = 2M\delta \Rightarrow \delta = \frac{\epsilon}{2M}$$

□

El Gradiente

Definición 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. Entonces el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f en x_0 se le denomina Vector Gradiente*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0),\right)$$

y se le denota por ∇f.

En el caso particular $n = 2$ se tiene

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\right)$$

En el caso particular $n = 3$ se tiene

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\right)$$

Ejemplo Calcular ∇f para $f(x,y) = x^2y + y^3$

Solución En este caso

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy, x^2 + 3y^2\right)$$

Teorema 2. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u$$

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \neq 0$ y $\|u\| = 1$ como f es diferenciable en (x_0, y_0), se tiene que

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

satisface

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

tomando $h = tu$ se tiene $\|h\| = \|(h_1, h_2)\| = \|tu\| = |t|\|u\| = |t|$
se tiene entonces

$$f((x_0, y_0) + t(u)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)tu_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)tu_2 + r(tu_1, ru_2)$$

y también

$$\frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = \frac{r(tu_1, ru_2)}{\|tu\|} = \frac{r(tu_1, ru_2)}{|t|\|u\|} = \frac{r(tu_1, ru_2)}{|t|}$$

tenemos entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(tu_1, ru_2)}{|t|} = \lim_{t\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + t(u)) - f(x_0, y_0)}{|t|} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)tu_1}{|t|} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)tu_2}{|t|}$$

es decir

$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2$$

y en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)u_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0\right) \cdot (u_1, u_2) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u$$

$\square$

Ejemplo Halle la derivada direccional de $f(x,y) = \ln(x^2 + y^3)$ en el punto $(1, -3)$ en la dirección $(2, -3)$

Solución En este caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -3) = \frac{2x}{x^2 + y^3}\Big|_{(1,-3)} = \frac{-2}{26}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -3) = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}\Big|_{(1,-3)} = \frac{-27}{26}$$

por lo tanto

$$\nabla f(1,-3)=\left(\frac{-2}{26},\frac{-27}{26}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)=\frac{77}{26\sqrt{13}}=\frac{77\sqrt{13}}{338}$$

Caso particular de la regla de la cadena

Supongamos que $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Sea $h(t)=f(x(t),y(t),z(t))$ donde $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$. Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

Esto es: $\dfrac{\partial h}{\partial t}=\nabla f(c(t))\cdot c'(t)$, donde $c'(t)=((x'(t),y'(t),z'(t))$

Dem: Por definición $\dfrac{\partial h}{\partial t}(t_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$ Sumando y restando tenemos que

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}=\frac{f(c(t))-f(c(t_0))}{t-t_0}=\frac{f(x(t),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}=$$

$$=\frac{f(x(t),y(t),z(t))\ -\ f(x(t_0),y(t),z(t))\ +\ f(x(t_0),y(t),z(t))\ -\ f(x(t_0),y(t_0),z(t))\ +\ f(x(t_0),y(t_0),z(t))\ -\ f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}\ldots *$$

Aplicando el Teorema del valor medio **(T.V.M.)**

$$f(\ x(t),\ y(t),\ z(t))-f(\ x(t_0),\ y(t),\ z(t))=\frac{\partial f}{\partial x}(\ c,\ y(t),\ z(t))\ (x(t)-x(t_0))$$

$$f(\ x(t_0),\ y(t),\ z(t))-f(\ x(t_0),\ y(t_0),\ z(t))=\frac{\partial f}{\partial y}\ (x(t),\ d,\ z(t))\ (y(t)-y(t_0))$$

$$f(\ x(t_0),\ y(t_0),\ z(t))-f(\ x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0))=\frac{\partial f}{\partial z}(\ x(t),\ y(t),\ e)\ (z(t)-z(t_0))$$

$$\therefore\ *\ =\ \frac{\partial f}{\partial x}\ (\ c,\ y(t),\ z(t))\ \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+\frac{\partial f}{\partial y}\ (\ x(t),\ d,\ z(t))\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}+\frac{\partial f}{\partial z}\ (\ x(t),\ y(t),\ e))\ \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$$

Tomando $\lim\limits_{t\to t_0}$ y por la continuidad de las parciales

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Teorema 3. *El gradiente es normal a las superficies de nivel. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una aplicación C^1 y sea $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ un punto sobre la superficie de nivel S definida por $f(x,y,z)=k,\ \ k=cte$. Entonces $\nabla f(x_0,\ y_0,\ z_0)$ es normal a la superficie de nivel en el siguiente sentido: si v es el vector tangente en $t{=}t_0$ de una trayectoria $c(t)$ con $c(t_0)=(x_0,\ y_0,\ z_0)$ Entonces $\nabla f\cdot v\ =0$*

Demostración. Sea $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva contenida en la superficie que pase por (x_0, y_0, z_0), con $c(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ al estar en la superficie se debe cumplir $f(c(t)) = k \;\Rightarrow\; f(xt, y(t), z(t)) = k$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x(t), y(t)z(t)) = 0$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)z(t))\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)z(t))\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t)z(t))\frac{dz}{dt} = 0$$

que se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)z(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)z(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t)z(t))\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

en $t = t_0$

$$\nabla f(x(0), y(0), z(0)) \cdot c'(t_0) = 0$$

$\square$