Ejemplos: Caso particular de la regla de la cadena

Supongamos que $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sea $h(t)=f(x(t), y(t), z(t))$ donde $c(t)=(x(t), y(t), z(t))$. Entonces

$$h'(t) = \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}(c(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}(c(t))\cdot\frac{dz(t)}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(c(t)), \frac{\partial f}{\partial z}(c(t))\right)\cdot\left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt}\right)$$

Esto es: $\dfrac{\partial h}{\partial t}=\nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$, donde $c'(t)=((x'(t), y'(t), z'(t))$

Ejemplo Verificar la regla de la cadena para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ y $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (e^t, \cos(t))$

Solución En este caso $h(t) = f \circ c(t) \;\Rightarrow\; h'(t) = \dfrac{\partial h}{\partial t}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial x}\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot \frac{d(e^t)}{dt} = 2x\,\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot e^t = 2e^t \cdot e^t = 2e^{2t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial(x^2 + 3y^2)}{\partial y}\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot \frac{d(\cos(t))}{dt} = 6y\,\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot (-\operatorname{sen}(t)) = 6\cos(t)\cdot(-\operatorname{sen}(t))$$

por lo tanto

$$h'(t) = 2e^{2t} - 6\cos(t) \cdot (\operatorname{sen}(t))$$

Ejemplo Verificar la regla de la cadena para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = xy$ y $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (e^t, \cos(t))$

Solución En este caso $h(t) = f \circ c(t) \;\Rightarrow\; h'(t) = \dfrac{\partial h}{\partial t}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial(xy)}{\partial x}\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot \frac{d(e^t)}{dt} = y\,\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot e^t = \cos(t) \cdot e^t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c(t)) \cdot \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\partial(xy)}{\partial y}\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot \frac{d(\cos(t))}{dt} = x\,\Big|_{(e^t,\cos(t))} \cdot (-\operatorname{sen}(t)) = e^t \cdot (-\operatorname{sen}(t))$$

por lo tanto

$$h'(t) = \cos(t)e^t - e^t \cdot \operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo Verificar la regla de la cadena para $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = e^{xy}$ y $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $c(t) = (3t^2, t^3)$

Solución En este caso $h(t) = f \circ c(t) \;\Rightarrow\; h'(t) = \dfrac{\partial h}{\partial t}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial(e^{xy})}{\partial x}\Big|_{(3t^2,t^3)} \cdot \frac{d(3t^2)}{dt} = ye^{xy}\,\Big|_{(3t^2,t^3)} \cdot 6t = t^3e^{3t^5}6t = 6t^4e^{3t^5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t)) \cdot \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\partial (e^{xy})}{\partial y}\Big|_{(3t^2,t^3)} \cdot \frac{d(t^3)}{dt} = xe^{xy}\Big|_{(3t^2,t^3)} \cdot 3t^2 = 3t^2 e^{3t^5} 3t^2 = 9t^4 e^{3t^5}$$

por lo tanto

$$h'(t) = 6t^4 e^{3t^5} + 9t^4 e^{3t^5} = 15t^4 e^{3t^5}$$

Aplicación: Caso particular de la regla de la cadena

Teorema 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $F(t) = f(x_0+h_1t, y_0+h_2t)$ con $(h_1, h_2) \in Dom_f$. Demuestre que existe $\theta \in (0,1)$ tal que*

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h_1\theta, y_0+h_2\theta)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1\theta, y_0+h_2\theta)h_2$$

Demostración. Vamos a definir una función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ como $c(t) = (x(t), y(t))$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ahora tomamos $F(t) = f(x_0 + h_1t, y_0 + h_2t)$ de esta manra $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aplicando la regla de la cadena se tiene

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h_1t, y_0+h_2t)\frac{d(x_0+h_1t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1t, y_0+h_2t)\frac{d(y_0+h_2t)}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h_1t, y_0+h_2t)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1t, y_0+h_2t)h_2$$

Aplicando ahora el TVM a F en un intervalo $[0, t]$ se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\frac{F(t) - F(0)}{t - 0} = F'(\theta t)$$

es decir

$$\frac{f(x_0+h_1t, y_0+h_2t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h_1\theta t, y_0+h_2\theta t)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1\theta t, y_0+h_2t)\theta h_2$$

tomando $t = 1$ se obtiene el resultado buscado $\square$

Ejemplo Hallar un valor θ para el cual

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta h_1, y_0+\theta h_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\theta h_1, y_0+\theta h_2)h_2$$

Si $f(x, y) = xy + y^2 \quad x_0 = y_0 = 0 \quad h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{4}$. Tenemos que

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\left(\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{4}\right)} = \frac{\theta}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{4})} = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2} = \theta$$

$$\therefore \quad h\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{4})} + k\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(\frac{\theta}{2},\frac{\theta}{4})} = \frac{1}{2}\left(\frac{\theta}{4}\right) + \frac{1}{4}(\theta) = \frac{3\theta}{8}$$

$$\therefore \quad \frac{3\theta}{8} = \frac{3}{16} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{1}{2}$$

Dirección de Mayor Crecimiento de una Función

Teorema 2. *Supongamos que $\nabla(f(x)) \neq (0,0,0)$. Entonces $\nabla(f(x))$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.*

Demostración. Si v es un vector unitario, la razón de cambio de f en la dirección v está dada por $\nabla(f(x))\cdot v$ y $\nabla(f(x))\cdot v = \|\nabla f(x)\|\ \|v\| \cos\Theta = \|\nabla f(x)\| \cos\Theta$, donde Θ es el ángulo entre ∇f, v. Este es máximo cuando $\Theta = 0$ y esto ocurre cuando v, ∇f son paralelos. En otras palabras, si queremos movernos en una dirección en la cual f va a crecer más rápidamente, debemos proceder en la dirección $\nabla f(x)$. En forma análoga, si queremos movernos en la dirección en la cual f decrece más rápido, habremos de proceder en la dirección $-\nabla f$. $\square$

Ejemplo Encontrar la dirección de rapido crecimiento en $(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Solución En este caso

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial y}, \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial z}\right)\Big|_{(1,1,1)} =$$

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,1)$$

Puntos Estacionarios

Definición. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, a los puntos $x \in \Omega$ tales que $\nabla f(x) = 0$ se les llama puntos críticos (o punto estacionario) de la función.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$ hallar los puntos críticos de f

Se tiene que $\nabla f(x) = (2x, 2y) \qquad \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x,2y) = (0,0) \Leftrightarrow 2x = 0$ y $2y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $y = 0$
$\therefore$ $(0,0)$ es el único punto crítico de f

Ejemplo. Que condición se debe satisfacer para que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx - ey + f$ tenga un punto crítico

$$\nabla f = (2ax + 2by + d, 2bx + 2cy - e) \qquad \text{entonces}$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow 2ax + 2by + d = 0 \text{ y } 2bx + 2cy - e = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + 2by = -d \quad \text{ y } \quad 2bx + 2cy = e \quad \text{ se necesita que } \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow 2a(2c) - (2b)^2 \neq 0 \qquad \therefore ac - b^2 \neq 0$$