Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definición 1. *Una función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ denotada $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es una relación que asigna a cada vector del espacio $\mathbb{R}^n$ un único vector del espacio $\mathbb{R}^m$*
Si f es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces f se expresa

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

en donde f_k $k = 1, ..., m$ es la k-ésima función componente y $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $k = 1, ..., m$

Definición 2. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, la imagen bajo la función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se denota $f(A)$, y se define*

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in A\}$$

Definición 3. *El dominio de una función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es la intersección de los dominios de las funciones componentes f_k es decir*

$$Dom_f = \bigcap_{k=1}^{m} Dom_{f_k} = Dom_{f_1} \bigcap Dom_{f_2} \bigcap Dom_{f_3} \bigcap \cdots \bigcap Dom_{f_m}$$

Ejemplo Encontrar el dominio y la imagen de la recta $y = 3x$ para la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right)$$

Solución En este caso

$$f_1 = \left(\frac{4x+2y}{5}\right) \;\Rightarrow\; Dom_{f_1} = \mathbb{R}^2$$

$$f_2 = \left(\frac{2x+y}{5}\right) \;\Rightarrow\; Dom_{f_2} = \mathbb{R}^2$$

por lo tanto

$$Dom_f = Dom_{f_1} \bigcap Dom_f = \mathbb{R}^2 \bigcap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

Para la imagen de la recta $y = 3x$ procedemos de la siguiente manera

$$f(x,y) = \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right) = (x', y') \;\Rightarrow\; f(x,3x) = \left(\frac{4x+2(3x)}{5}, \frac{2x+(3x)}{5}\right) = (x', y') \;\Rightarrow$$

$$x' = \frac{4x+2(3x)}{5} \;\; y \;\; y' = \frac{2x+(3x)}{5} \;\Rightarrow\; x' = 2x \;\; y \;\; y' = x \;\;\Rightarrow\;\; y' = \frac{x'}{2}$$

por lo tanto la imagen de la recta $y = 3x$ sera:

$$f(3x) = \left\{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y' = \frac{x'}{2}\right\}$$

Ejemplo Encontrar el dominio y la imagen de la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\; 0 \le y \le 1\}$ para la función $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Solución En este caso

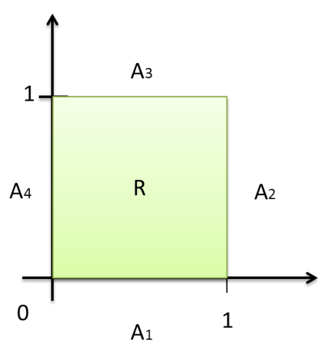
$$f_1 = \left(x^2 - y^2\right) \;\Rightarrow\; Dom_{f_1} = \mathbb{R}^2$$

$$f_2 = (2xy) \;\Rightarrow\; Dom_{f_2} = \mathbb{R}^2$$

por lo tanto

$$Dom_f = Dom_{f_1} \bigcap Dom_f = \mathbb{R}^2 \bigcap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

Para la imagen de la región $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\right\}$ procedemos de la siguiente manera: Definimos los siguientes conjuntos que limitan la región



$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ x = 1\}$$

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 1\}$$

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ x = 0\}$$

ahora procedemos a encontrar las imagenes de cada uno de los conjuntos definidos
Para A_1 se tiene

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ y = 0\} \;\; f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y=0} x' = x^2 \;\; y \;\; si \;\; 0 \leq x \leq\leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq x^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 0 \leq x' \leq 1$$

$$y' = 2xy \;\; \underbrace{\Rightarrow}_{y=0} y' = 0$$

por lo tanto

$$f(A_1) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x' \leq 1 \;,\; y' = 0\}$$

Para A_2 se tiene

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1,\ x = 1\} \;\; f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{x=1} x' = 1 - y^2 \;\Rightarrow\; y = \sqrt{1 - x'}$$

$$y' = 2xy \;\; \underbrace{\Rightarrow}_{x=1} y' = 2y \;\Rightarrow\; y' = 2\sqrt{1 - x'} \;\Rightarrow\; y'^2 = 4(1 - x')$$

por lo tanto

$$f(A_2) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y'^2 = 4(1 - x'),\ 0 \leq y' \leq 2\}$$

Para A_3 se tiene

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = 1\} \quad f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y=1} x' = x^2 - 1 \ \Rightarrow\ x' + 1 = x^2 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{x'+1}$$

$$y' = 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{y=1} y' = 2x \ \Rightarrow\ y' = 2\sqrt{x'+1} \ \Rightarrow\ y'^2 = 4(x'+1)$$

por lo tanto

$$f(A_3) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y'^2 = 4(x'+1),\ 0 \le y' \le 2\}$$

Para A_4 se tiene

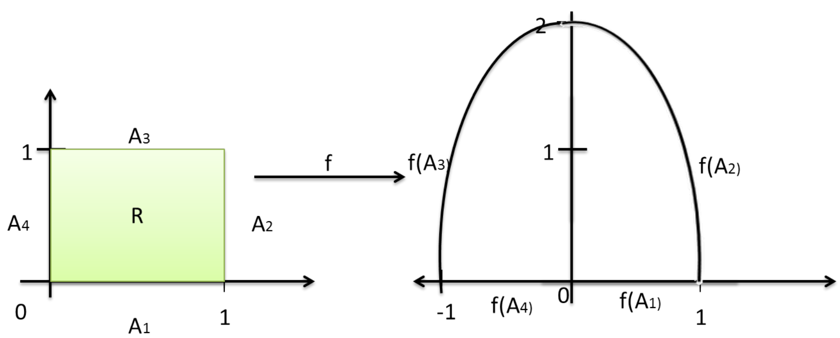
$$A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x = 0\} \quad f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{x=0} x' = -y^2 \quad y \quad si \quad 0 \le y \le 1 \ \Rightarrow\ 0 \le y^2 \le 1 \ \Rightarrow\ -1 \le y^2 \le 0$$

$$y' = 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{x=0} y' = 0$$

por lo tanto

$$f(A_4) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x' \le 0\ ,\ y' = 0\}$$



A las funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se les suele llamar transformaciones

Transformaciones Lineales

Definición 4. *Dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se dice que es una transformación lineal si:*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall\ x, y\ \in \mathbb{R}^n$$

$$f(cx) = cf(x) \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejemplo Dada la transformación $f(x,y) = \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right)$. Muestre que es lineal

Solución En teste caso si $x = (x_1, y_1)$ y $y = (x_2, y_2)$ estan en el Dom_f entonces

$$f(x+y) = f(x_1+x_2, y_1+y_2) = \left(\frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2}, \frac{x_1+x_2+y_1+y_2}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1+y_1}{2}\right) + \left(\frac{x_2+y_2}{2}, \frac{x_2+y_2}{2}\right) = f(x) + f(y)$$

Además

$$f(cx) = f(cx_1, cy_1) = \left(\frac{cx_1+cy_1}{2}, \frac{cx_1+cy_1}{2}\right) = c\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1+y_1}{2}\right) = cf(x)$$

Definición 5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una transformación. Se dice que f es acotada si existe $M > 0$ tal que*

$$\|f(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n$$

Ejercicio Muestre que una transformación lineal es acotada

Demostración. Sea $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

por lo tanto

$$\|f(x)\| = \left\|f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} f(x_i e_i)\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i f(e_i)\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\, \|f(e_i)\| \leq$$

$$\|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\| \leq \|x\| \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\| \underbrace{=}_{\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\| = M} M\|x\|$$

$\square$