Diferenciales en Campos Vectoriales

Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ entonces la diferenciabilidad de f en $(x_0,y_0) \in Dom_f$ tendrá que tener alguna relación con la diferenciabilidad de sus funciones componentes en (x_0,y_0).
Tenemos que según la definición de diferenciabilidad para funciones $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 + r(h_1,h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

Para ver que $f_1(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) se tiene

$$f_1(x_0+h_1, y_0+h_2) = f_1(x_0,y_0) + \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 + r_1(h_1,h_2)$$

cumple

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r_1(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

que se puede escribir

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_1(x_0+h_1,y_0+h_2) - f_1(x_0,y_0) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)h_2}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

En forma matricial

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r_1(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{f_1(x_0+h_1,y_0+h_2) - f_1(x_0,y_0) - \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array}\right]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Para ver que $f_2(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) se tiene

$$f_2(x_0+h_1, y_0+h_2) = f_2(x_0,y_0) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)h_2 + r_2(h_1,h_2)$$

cumple

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r_2(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

que se puede escribir

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f_2(x_0+h_1,y_0+h_2) - f_2(x_0,y_0) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0)h_1 - \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)h_2}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

En forma matricial

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r_2(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{f_2(x_0+h_1,y_0+h_2) - f_2(x_0,y_0) - \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \end{array}\right]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

Para ver que $f_3(x,y)$ es diferenciable en (x_0,y_0) se tiene

$$f_3(x_0+h_1,y_0+h_2)=f_3(x_0,y_0)+\frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0)h_1+\frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)h_2+r_3(h_1,h_2)$$

cumple

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r_3(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=0$$

que se puede escribir

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f_3(x_0+h_1,y_0+h_2)-f_3(x_0,y_0)-\frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0)h_1-\frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)h_2}{\|(h_1,h_2)\|}=0$$

En forma matricial

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r_3(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=\frac{f_3(x_0+h_1,y_0+h_2)-f_3(x_0,y_0)-\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0)\quad\frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\left[\begin{array}{c}h_1\\h_2\end{array}\right]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

Ahora bien para la función f podriamos expresarlo así:

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-$$

$$\frac{\left(\left[\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0)\quad\frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\left[\begin{array}{c}h_1\\h_2\end{array}\right],\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0)\quad\frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\left[\begin{array}{c}h_1\\h_2\end{array}\right],\left[\frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0)\quad\frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)\right]\left[\begin{array}{c}h_1\\h_2\end{array}\right]\right)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

ó también

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\left[\begin{array}{c}h_1\\h_2\end{array}\right]}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$

Definición 1. *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ definida en el abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y $x_0\in\Omega$. Se dice que f es diferenciable en $x_0\in\Omega$ si y solo si existen las derivadas parciales de cada componente de f, $\frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j}$ $\forall i=1,...,m$ $\forall j=1,...,n$ y tal que*

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}h_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ h_n\end{pmatrix}+r(h)$$

cumple

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$$

A la matriz de $m \times n$ se le llama Matriz Jacobiana de la función f en x_0 y se le denota $Jf(x_0)$.
Ejemplo.-La función $f:\mathbb{R}^2 \to f:\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (x^2+3y^2, 5x^3+2y^6)$ es diferenciable en todo su dominio, hallar su matriz jacobiana en un punto $x \in f:\mathbb{R}^2$
solución

$$Jf(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 6y \\ 15x^2 & 12y \end{pmatrix}$$

La matriz Jacobiana se puede ver como la matriz asociada a una transformación lineal T, y entonces podemos definir

Definición 2. *Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida en el abierto Ω de $\mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f es diferenciable en $x_0 \in \Omega$ si y solo si existe una transformación lineal T, talque*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(x_0)\cdot h\|}{\|h\|} = 0$$

donde $T(x_0)$ es la matriz Jacobiana denotada por $Jf(x_0)$

En términos $\epsilon - \delta$ se tiene que si $0 < \|h\| < \delta$ entonces

$$\frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(x_0)\cdot h\|}{\|h\|} < \epsilon$$

Ejemplo Muestre que $f:\mathbb{R}^2 \to\to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y) = (xy^2, x^2+y^2, 2x^3y^2)$ es diferenciable en $(0,0)$

Solución En este caso tenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - T(x_0)\cdot h\|}{\|h\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|f_1(h_1,h_2) - f_1(0,0) - \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)h_2, f_2(h_1,h_2) - f_2(0,0) - \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0)h_2,}{\|(h_1,h_2)\|}$$

$$\frac{f_3(h_1,h_2) - f_3(0,0) - \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,0)h_1 - \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,0)h_2\|}{\|(h_1,h_2)\|} =$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\|h_1h_2^2, h_1^2+h_2^2, 2h_1^3h_2^2\|}{\|(h_1,h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{\left(h_1h_2^2\right)^2 + \left(h_1^2+h_2^2\right)^2 + (2h_1^3h_2^2)}}{(\sqrt{h_1^2+h_2^2})}$$

Haciendo un cambio de variable podemos calcular el límite en este caso $h_1 = r\cos(\theta)$ $h_2 = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ y obtenemos

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{\left(h_1h_2^2\right)^2 + \left(h_1^2+h_2^2\right)^2 + \left(2h_1^3h_2^2\right)^2}}{(\sqrt{h_1^2+h_2^2})} = \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{r^2\cos^2(\theta)r^4\,\mathrm{sen}^4(\theta) + r^4 + 4r^6\cos^6(\theta)r^4\,\mathrm{sen}^4(\theta)}}{r} =$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{r^6\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta) + r^4 + 4r^{10}\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta)}}{r} = \lim_{r\to 0} \frac{\sqrt{r^4\left(r^2\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta) + 1 + 4r^6\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta)\right)}}{r}$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\sqrt{r^2\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta) + 1 + 4r^6\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta)}}{r} = \lim_{r\to 0} r\sqrt{r^2\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta) + 1 + 4r^6\cos^6(\theta)\,\mathrm{sen}^4(\theta)} = 0$$