Diferenciales en Campos Vectoriales parte 2

Definición 1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \,\epsilon\, \Omega$ se dice que es diferenciable en x_0 si existe una Transformación Lineal T tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - T(x_0)h}{\|h\|} = 0$$

Teorema 1. *Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es diferenciable en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Entonces todas las derivadas parciales de f existen en el punto x_0 y la matriz $T \,\epsilon\, M_{mxn}$ esta dada por*

$$[t_{ij}] = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$$

esto es

$$T = Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

donde $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ está evaluada en x_0.
En particular, esto implica que T esta determinada de manera única.

Demostración. Al ser f diferenciable

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f_i(x_0+h) - f_i(x_0) - Th_i|}{\|h\|} = 0 \qquad 0 \le i \le m$$

Aqui (Th_i) denota la i-esima componente del vector columna ahora sea $h = ae_j = (0, \ldots, \underset{j-esimo}{a}, \ldots, 0)$ obtenemos

$$\lim_{a\to 0} \frac{|f_j(x_0+ae_j) - f_j(x_0) - aTe_{ji}|}{|a|} = 0$$

$$\lim_{a\to 0} \left| \frac{f_j(x_0+ae_j) - f_j(x_0)}{a} - (Te_j)_i \right| = 0$$

$$\therefore \qquad \lim_{a\to 0} \frac{f_j(x_0+ae_j) - f_j(x_0)}{a} = (Te_j)_i$$

pero este limite es la parcial $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ calculada en x_0 entonces probamos que $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ existe y

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = (Te_i)_j = t_{ij}$$

□

es decir la transformación lineal tiene como matriz asociada a la matriz jacobiana
Vamos a probar que la transformación lineal es única

Demostración. Supongamos que existieran transformaciones lineales T_1 y T_2 cumpliendo

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-T_1(x)}{\|h\|}=0 \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-T_2(x)}{\|h\|}=0$$

entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-T_1(x)}{\|h\|}-\left(\frac{f(x_0+x)-f(x_0)-T_2(x)}{\|h\|}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{T_2(x)-T_1(x)}{\|h\|}=0$$

consideremos el siguiente cambio de variable $h=t\dot{x}$ donde $t\in\mathbb{R}$ y $\|\dot{x}\|=1$ por lo tanto, $t\dot{x}\to 0$ cuando $h\to 0$ por lo tanto,

$$\lim_{t\to 0}\frac{T_2(t\dot{x})-T_1(t\dot{x})}{\|t\dot{x}\|}\underset{\text{T es lineal}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{t[T_2(\dot{x})-T_1(\dot{x})]}{|t|\|\dot{x}\|}$$

por lo tanto para cualquier t

$$T_2(\dot{x})=T_1(\dot{x})$$

$$\therefore \quad T_2=T_1$$

□

Teorema 2. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ un abierto, $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $x_0\,\epsilon\,\Omega$. Si f es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

Demostración. Al ser f diferenciable en x_0 se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-T(x_0)h\|}{\|h\|}=0$$

en términos de ϵ δ

$$\frac{\|f(x_0+h)-f(x_0)-T(x_0)h\|}{\|h\|}<\epsilon \quad \textit{siempre que} \quad \|h\|<\delta$$

esto se puede escribir

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)-T(x_0)h\|<\epsilon\|h\| \quad \textit{siempre que} \quad \|h\|<\delta$$

por lo tanto tenemos que

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|=\|f(x_0+h)-f(x_0)-T(x_0)h+T(x_0)h\|\leq\|f(x_0+h)-f(x_0)-T(x_0)h\|+\|T(x_0)h\|$$

$$<\epsilon\|h\|+\|T(x_0)h\| \underbrace{<}_{T\ lineal\Rightarrow\exists\ M_2>0\ \ tal\ que\ \|T(x_0)h\|<M_2} \epsilon\|h\|+M_2\|h\|=\|h\|(\epsilon+M_2)<\delta(\epsilon+M_2)$$

Si hacemos $\epsilon'=\delta(\epsilon+M_2)$ para $\epsilon'>0$ entonces $\delta=\dfrac{\epsilon'}{(\epsilon+M_2)}$

Por lo tanto

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|<\delta(\epsilon+M_2)=\frac{\epsilon'}{(\epsilon+M_2)}(\epsilon+M_2)=\epsilon'$$

y en consecuencia f es continua en x_0 □

Teorema 3. *Regla de la Cadena Sean $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ funciones dadas, entonces la composición $f \circ g$ tiene la regla de correspondencia $f(g(x))$ y dominio*

$$Dom_{f\circ g} = \{x \in Dom_g \mid g(x) \in Dom_f\}$$

Si $g = (g_1, g_2, \cdots, g_m)$ es diferenciable en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ y $f = (f_1, f_2, \cdots, f_p)$ es diferenciable en en un conjunto abierto D' tal que $g(D) \subset D'$ Entonces

$$J(f \circ g) = Jf(g)Jg$$

Demostración. Tenemos que

$$Jf \circ g = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(g_1, g_2, \cdots, g_m) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(g_1, g_2, \cdots, g_m) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(g_1, g_2, \cdots, g_m) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(g_1, g_2, \cdots, g_m) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial g_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial g_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial g_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial g_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial g_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial g_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial g_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial g_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} = Jf(g)Jg$$

$\square$