Espacios ℓ_p

Definición 1. *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ definimos*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad si \quad p \in [1, \infty)$$

Proposición 1. *Dada $p \in [1, \infty)$, consideramos el conjunto ℓ_p de todas las sucesiones (x_k) de números reales tales que la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p$$

converge. Entonces la función

$$\|(x_k)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

es una norma en ℓ_p

Demostración.

$$a) \quad \|x_k\|_p \geq 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \geq 0 \Leftrightarrow |x_k|^p \geq 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0 \Leftrightarrow x_k \geq 0$$

$$b) \quad \|\lambda x_k\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|x_k\|_p$$

Como la $\|\|_p$ satisface la desigualdad del triángulo, se tiene que

$$c) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_k\|_p + \|y_k\|_p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. En consecuencia, la serie

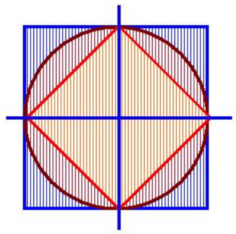
$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p$$

converge y se cumple que

$$\|x_k + y_k\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x_k\|_p + \|y_k\|_p$$

□

Ya hemos comprobado que



Intuitivamente

$B_1(x_0, r) \subset B_2(x_0, r) \subset B_\infty(x_0, r)$

Esto es la consecuencia de las desigualdades

$\| \bar{x} \|_\infty \leq \| \bar{x} \|_2 \leq \| \bar{x} \|_1$

que en forma explicita se escriben:

$$\mathbf{max}\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \;\leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$

Probemos estas desigualdades:

Como $|x_i|^2 \leq x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2 \ \forall i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\mathbf{max}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \;\therefore\; \|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_2$$

Por otra parte dado que

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \;\leq\; (|x_1| + \cdots + |x_n|)^2$$

entonces

$$\sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \;\leq\; |x_1| + \cdots + |x_n|$$

$$\therefore \quad \|\bar{x}\|_2 \leq \|x\|_1$$

Las contenciones tanto para las bolas abiertas, como para las bolas cerradas se siguen de las desigualdades

$$\|\bar{x} - x_0\|_\infty \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_2 \leq \|\bar{x} - x_0\|_1$$

Pues por ejemplo si $\bar{x} \in B_2(\bar{x}_0, r)$ entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|_2 < r$ luego $\|\bar{x} - x_0\|_\infty < \|x - x - 0\| < r$

$\therefore \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_\infty < r$ es decir $x \subset B_\infty(x_0, r) \therefore B_2(\bar{x}_0, r) \subset B_\infty(\bar{x}_0, r)$

Si $x \in B_1(\bar{x}_0, r)$ entonces $\|\bar{x} - \bar{x}_0\|_1 < r$ luego $\|x - \bar{x}_0\|_2 \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\|_1 < r \therefore \|x - \bar{x}_0\|_2 < r$

$\therefore x \in B_2(x_0, r) \therefore B_1(\bar{x}_0, r) \subset B_2(x_0, r)$

Para las esferas

$$S_1 \subseteq B_2(\bar{x}_0, r) \subset B_{\infty(\bar{x}_0, r)}$$

$$S_2 \subseteq B_\infty(\bar{x}_0, r)$$

$$S_\infty \subseteq B_\infty(\bar{x}_0, r)$$

Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados

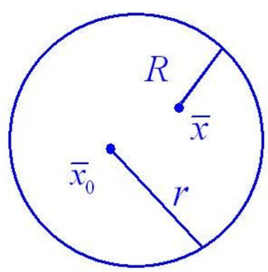
Definición 2. *Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si para cada $\bar{x} \in V$ existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en V. Es decir si para cada $\bar{x} \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset V$.*

Ejemplo: Toda bola abierta en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto.

Demostración: Sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Mostraremos que $B(\bar{x}_0, r)$ es un conjunto abierto. Debemos probar que para cada $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$, existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida a su vez en la bola abierta $B(\bar{x}_0, r)$.

Sea pues $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$ y consideremos $R = r - \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$.

Como $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, r)$ se tiene entonces que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r \therefore R > 0$. Mostraremos que la bola abierta $B(\bar{x}, R)$ esta contenida en $B(\bar{x}_0, r)$.

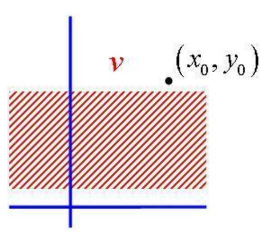


Sea entonces $y \in B(\bar{x}, r)$. Por definición se tiene que $\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$

$$\begin{aligned} \therefore \quad \|\bar{y} - \bar{x}_0\| &= \|\bar{y} - \bar{x} + \bar{x} - \bar{x}_0\| \\ &\leq \|\bar{y} - \bar{x}\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \\ &< R + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r \end{aligned}$$

esto prueba que $\bar{y} \in B(\bar{x}_0, r)$.

Ejemplo: Mostraremos que en $\mathbb{R}^2$, el semiplano superior $v = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$, es un conjunto abierto respecto a la norma $\| \|_1$



Sea $\bar{v}_0 = (x_0, y_0) \in v \quad \therefore y_0 > 0$

debemos mostrar que hay una bola abierta $B_1(\bar{v}_0, v)$ contenida en el semiplano superior

Sea $v = y_0$ y consideremos la bola $B_1(\bar{v}_0, y_0)$ y sea $\bar{v} = (x, y) \in B_1(\bar{v}_0, y_0)$ se tiene que $\|\bar{v} - v_0\|_1 < y_0$, es decir, $|x - x_0| + |y - y_0| < y_0$.

Debemos probar que $y > 0$

(1) y no puede ser cero pues si $y = 0$ $|x - x_0| + |y - y_0| < y_0 \Rightarrow |x - x_0| + |y_0| < y_0$ **!**

(2) y no puede ser negativa pues $|x - x_0| + |y - y_0| = |x - x_0| + \underbrace{|y| + |y_0|}_{*} < y_0$ **!**

* $y < y_0 \Rightarrow |y - y_0| = -y + y_0 = |y| + |y_0| \therefore y$ tiene que ser $y > 0 \therefore B_1(\bar{v}_0, y_0)$ esta en el semiplano superior.