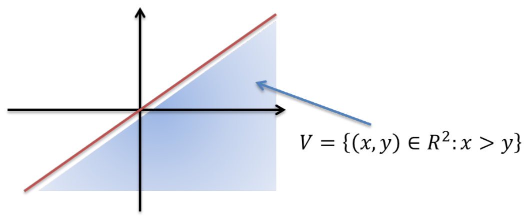
Conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



Demostración. Sea $v_0 = (x_0, y_0) \in V$ entonces $x_0 > y_0$. Definimos $r = x_0 - y_0 > 0$ ahora consideramos $B(v, r)$ vamos probar que $B(v, r) \subset V$
Sea $v_1 = (x, y) \in B(v, r)$ con la norma $\|.\|_1$ se tiene

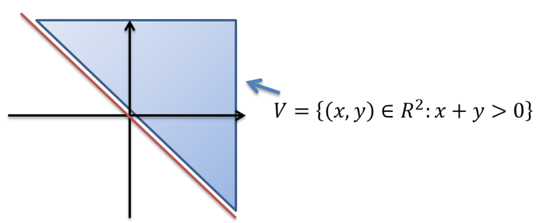
$$|x - x_0| + |y - y_0| < r$$

por lo tanto

$$x - y = x - x_0 + y_0 - y + x_0 - y_0 = x_0 - y_0 + x - x_0 + y_0 - y \geq x_0 - y_0 - (|x - x_0| + |y - y_0|) > 0$$

de esta manera $x - y > 0 \Rightarrow x > y$ y en consecuencia $v_1 \in V$ por lo que V es un conjunto abierto □

Ejemplo Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y > 0\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



Demostración. Sea $v_0 = (x_0, y_0) \in V$ entonces $x_0 + y_0 > 0$. Definimos $r = x_0 + y_0 > 0$ ahora consideramos $B(v, r)$ vamos probar que $B(v, r) \subset V$
Sea $v_1 = (x, y) \in B(v, r)$ con la norma $\|.\|_1$ se tiene

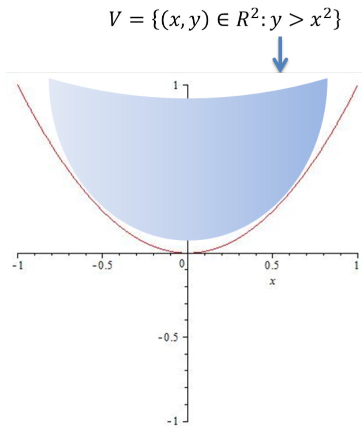
$$|x - x_0| + |y - y_0| < r$$

por lo tanto

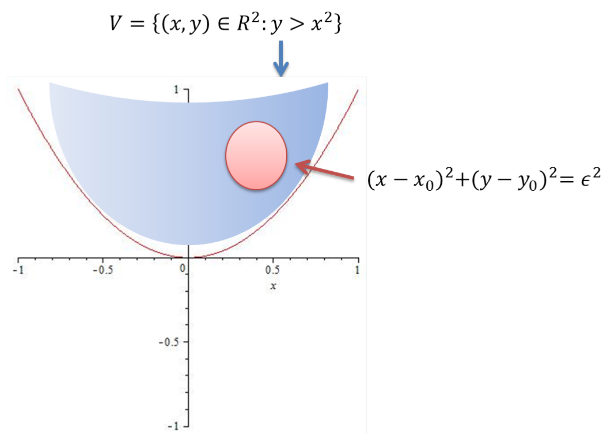
$$x + y = x - x_0 - y_0 + y + x_0 + y_0 = x_0 + y_0 + x - x_0 - y_0 + y \geq x_0 - y_0 - (|x - x_0| + |y - y_0|) > 0$$

de esta manera $x + y > 0$ y en consecuencia $v_1 \in V$ por lo que V es un conjunto abierto □

Ejemplo Sea $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



Demostración. Sea $v_0 = (x_0, y_0) \in V$ entonces $y_0 > x_0^2$. Definimos $r = y_0 + x_0^2 > 0$ ahora consideramos $B(v,r) = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \epsilon^2$



vamos probar que $B(v,r) \subset V$
Sea $v_1 = (x,y) \in B(v,r)$ cada punto en $B(v,r)$ cumple

$$|x - x_0| < \epsilon \quad |y - y_0| < \epsilon$$

y usando la identidad algebraica

$$x_0^2 = x^2 - 2(x-x_0)x_0 - (x-x_0)^2$$

tenemos que

$$y > y_0 - \epsilon = x_0^2 + y_0 - x_0^2 - \epsilon = x^2 - 2(x-x_0)x_0 - (x-x_0)^2 + y_0 - x_0^2 - \epsilon > x^2 - 2\epsilon x_0 - \epsilon^2 + y_0 - x_0^2 - \epsilon$$

Por lo tanto

$$y > x^2 - 2\epsilon x_0 - \epsilon^2 + y_0 - x_0^2 - \epsilon > x^2 \quad se \quad cumple \quad para \quad \epsilon = min\{1, \frac{y - x_0^2}{2|x_0| + 2}\}$$

de esta manera $y > x^2$ y en consecuencia $v_1 \in V$ por lo que V es un conjunto abierto □

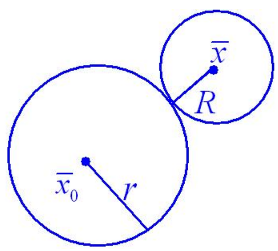
Proposición: Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Probaremos que la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado, es decir, que su complemento $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Sea pues $\bar{x} \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$. Mostraremos que existe una bola abierta $B(\bar{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$. Como $\bar{x}$ no está en la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$, se tiene entonces que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r$.

Definamos $R = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - r > 0$, esto equivale a $r = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - R$.

Veamos que $B(\bar{x}, R) \subset \mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$



En efecto, sea $y \in B(x, R)$ se tiene entonces $\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\bar{x} - \bar{x}_0\| &= \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y} - \bar{x}_0\| \\ &\leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \\ &< R + \|\bar{y} - \bar{x}_0\|\end{aligned}$$

luego $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| < R + \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \therefore \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - R < \|\bar{y} - \bar{x}_0\|$, es decir, $r < \|\bar{y} - \bar{x}_0\|$.

Esto significa que $\bar{y} \notin \bar{B}(\bar{x}_0, r)$, es decir, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(\bar{x}_0, R)$.

Definición: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$

(1) Un elemento $\bar{a} \in A$ se dice que es un punto interior de A, si existe una bola abierta con centro en $\bar{a}$ contenida en A es decir si $\exists\ r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$.

(2) Al conjunto de puntos interiores de un conjunto A se le llama Interior de A y se denota A° ó $\overset{o}{A}$ ó Int(A)

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\overset{o}{A}$ es un conjunto abierto*

Demostración. Sea $x \in \overset{o}{A}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$ como $B(x, r)$ es una bola abierta entonces $\forall\ \ y \in\ B(x, r)$ existe $r_2 > 0$ tal que

$$B(y, r_2) \subset B(x, r) \subset A \quad \therefore \quad y \in \overset{o}{A} \quad \therefore \quad \overset{o}{A} \ \ es \ \ abierto$$

□