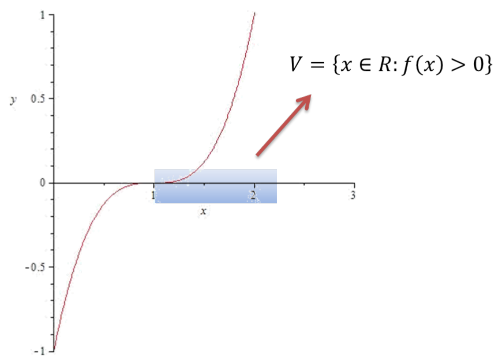
Conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo Sea $V = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



Demostración. Sea $y \in V$ entonces $f(y) > 0$. Definimos $\epsilon = f(y)$ y como f es continua

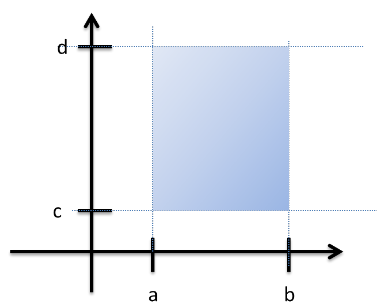
$$si \quad 0 < |x - y| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(y)| < \epsilon = f(y) \;\Rightarrow\; -f(y) < f(x) - f(y) < f(y) \;\Rightarrow\; 0 < f(x)$$

por lo tanto

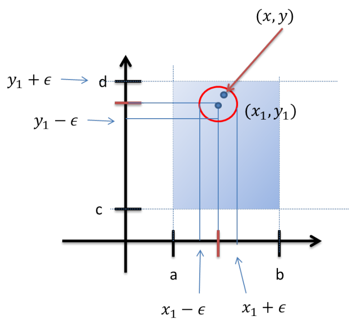
$$\forall\, x \in B(x, \delta) \;\; se \;\; tiene \;\; f(x) > 0$$

de esta manera $B(y, \delta) \subset V$ por lo que V es un conjunto abierto □

Ejemplo Sea $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b \;,\; c < y < d\}$. Demuestre que V es un conjunto abierto



Demostración



Sea $X = (x_1, y_1) \in V$ entonces $a < x_1 < b$ y $c < y_1 < d$. Definimos $\epsilon = min\{x_1 - a, b - x_1, y_1 - c, d - y_1\}$ por tanto si $(x, y) \in B(X, \epsilon)$ debe ocurrir

$$a < x_1 - \epsilon < x < x_1 + \epsilon < b \quad y \quad c < y_1 - \epsilon < y < y_1 + \epsilon < d$$

por lo tanto

$$(x, y) \in V \ \therefore \ B(X, \epsilon) \subset V$$

y en consecuencia V es un conjunto abierto

Definición: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$

(1) Un elemento $\bar{a} \in A$ se dice que es un punto interior de A, si existe una bola abierta con centro en $\bar{a}$ contenida en A es decir si $\exists\ r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$.

(2) Un elemento $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto adherente de A si toda bola abierta con centro $\bar{a}$ tiene puntos de A.
Es decir, si toda $r > 0$ $B(\bar{a}, r) \cap A \neq \emptyset$.

(3) Un elemento $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ se dice que es un punto exterior de A si $\bar{a} \in \overset{o}{A^c}$.

(4) Si A es un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$, la frontera de A es el conjunto $\bar{A} \cap \bar{A}^c$.
Es decir la frontera de un conjunto esta formada por aquellos puntos que son comunes tanto en al adherencia del conjunto como la adherencia de su complemento.

(5) Sea A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\overline{x} \in \mathbb{R}^{\ltimes}$ es un ***punto de acumulación*** de A, si toda bola abierta con centro en $\overline{x}$ contiene un punto de A distinto de $\overline{x}$ es decir

$$\forall r > 0 \quad (B(\overline{x}, r) - \{\overline{x}\}) \bigcap A \neq \emptyset$$

Al conjunto de puntos interiores de A se le denomina interior de A y se le denota por cualquiera de los simbolos $\overset{o}{A}$, A^o, $\mathbf{int}(A)$.
Al conjunto de puntos adherentes de A se le denomina adherencia (o cerradura de A) y se le denota por cualquiera de los simbolos $\bar{A}$, A^-, $\mathbf{adh}A$.
Al conjunto de puntos frntera de A se le denomina frontera y se le denota por cualquiera de los simbolos ∂A, $Fr(A)$
Al conjunto de puntos de acumulación de A se le denomina el conjunto derivado de A y se le denota A^a

Proposición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$*

Propiedades (1) *El interior de A es un conjunto abierto*

(2) *El interior de un conjunto es el mayor abierto contenido en A*

Demostración. (2)Sea O un abierto tal que $O \subset A$, como O es abierto cada $x \in O$ cumple $x \in \overset{o}{A}$ $\therefore$ $O \subset \overset{o}{A}$ □

(3) $\bar{A}$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Mostraremos que $\bar{A}^c$ es un conjunto abierto. Sea $\bar{x} \in \bar{A}^c$ como $\bar{x}$ no es punto adherente de A, existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \cap A = \emptyset$ es decir $A \subset [B(\bar{x}, r)]^c$, como $[B(\bar{x}, r)]^c$ es un conjunto cerrado $\bar{A} \subset [B(\bar{x}, r)]^c$.

(4) $\bar{A}$ es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A.

Demostración: Sea $x \in \bar{A}$ entonces si C es un conjunto cerrado tal que $A \subset C$ entonces $x \in C$. Supongamos que $x \notin C$ esto quiere decir $x \in C^c$ el cual es un conjunto abierto por lo tanto $\exists\ r > 0$ tal que $B(x, r) \subset C^c \subset A^c \therefore B(x, r) \bigcap A \neq \emptyset$ lo cual es una contradicción pues $x \in \bar{A}$. Por lo tanto si x pertenece a todos los cerrados que contienen a A en particular $x \in \bar{A}$ que contine a A.

(5) La frontera de todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Esto es consecuencia del hecho de que la adherencia de cualquier conjunto es cerrado y de que la intersección de 2 conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.

(6) La frontera de todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es igual a la frontera de su complemento.

Demostración: Sea A un subconjunto cualquiera de $\mathbb{R}^n$, se tiene entonces

$$Fr(A) = \bar{A}^c \cap \bar{A}$$

$$= \bar{A}^c \cap \bar{A}^{cc}$$

$$= Fr(A^c)$$

Ejemplo . Considere el conjunto

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Observe que en R cada punto del conjunto A es adherente a A pero que ningún elemento de A es punto de acumulación de A. El único punto de acumulación de este conjunto es 0.

Ejemplo Si $A = [a, b] \in \mathbb{R}$ entonces $\overline{A} = [a, b] = A^a$