Espacios Métricos

El concepto de $\| \ \|$ (norma) nos da una noción de distancia, el tener una noción de distancia en $\mathbb{R}$ o más generalmente en $\mathbb{R}^n$, es lo que nos permite hablar de limite o de convergencia.

Definición 1. *Sea X un conjunto. Una métrica (o distancia) en X es una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que tiene las siguientes propiedades*

$$\begin{array}{c} a)\ \ d(x,y) = 0 \ \ si \ \ y \ \ solo \ \ si \ \ x = y \\ b)\ \ d(x,y) = d(y,x) \ \ \forall \ \ x,y \in X \\ c)\ \ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \ \ \forall \ x,y,z \in X \end{array}$$

A esta última desigualdad se le llama desigualdad del triángulo.

Definición 2. *Un espacio métrico es un conjunto X provisto de una metrica d. Lo denotaremos por (X, d)*

Veamos que la distancia entre dos puntos nunca es negativa

Proposición 1. *$d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$*

Demostración. tenemos que de las propiedades de métrica

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$$

En consecuencia, $d(x,y) \geq 0$ para todos $x, y \in X$ □

Ejemplo La función

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|$$

donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$ y $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, es una métrica para el espacio euclideano $\mathbb{R}^n$

Demostración. Las propiedades a), b) son inmediatas y para la propiedad c) tenemos

$$|x_i - y_i| \leq |x_i| + |y_i| \quad \forall \ i = 1, ..., n$$

sumando ambos lados de estas desigualdades para $i = 1, ..., n$ obtenemos

$$d_1(x,z) \leq d_1(x,y) + d_1(y,z)$$

y en consecuencia d_1 es una métrica □

Ejemplo Métrica Discreta Demostrar que la metrica definida por $d(a,b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases}$ satisface los axiomas de métrica

Demostración :

1. Sean $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ entonces $d(a,b) = 1$ ó $d(a,b) = 0 \ \therefore \ \ d(a,b) \geq 0$

2. Sean $a, b \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ Si $\bar{a} \neq \bar{b} \quad d(\bar{a}, \bar{b}) = 1$ y si $\bar{b} \neq \bar{a} \quad d(b, a) = 1 \therefore \quad d(a, b) = 1 = d(b, a)$
   Ahora bien si $a = b$ entonces $d(a, b) = 0 \overset{*}{=} d(b, a)$
   * Si $a = b$ entonces $b = a$ por lo tanto $d(b, a) = 0$
3. Sean $\bar{a},\, \bar{b},\, \bar{c} \,\epsilon\, \mathbb{R}^n \quad \bar{a} \neq \bar{b} \neq \bar{c}$
   $d(\bar{a}, \bar{b}) = 1$, $d(\bar{b}, \bar{c}) = 1$ y
   $$d(\bar{a}, \bar{b}) = 1$$
   $\therefore \quad d(a, c) = 1 \leq 1 + 1 = d(a, b) + d(b, c)$

Ejemplo Métrica $C[a, b]$ Sea $C[a, b]$ el conjunto de las funciones reales contunias en el intervalo cerrado $[a, b]$. Sean $f, g \,\epsilon\, C[a, b]$ definimos

$$d(f, g) = \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$$

demostrar que d es una métrica.

Demostración :

1. Como $|f(x) - g(x)| \geq 0$ para todo $x \,\epsilon\, [a, b]$ entonces $\max\{|f(x) - g(x)|\} \geq 0$
   por lo tanto $d(f, g) \geq 0$
2. $d(f, g) = 0$
   $\Rightarrow \quad \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\} = 0$
   $\Rightarrow \quad |f(x) - g(x)| = 0$
   $\Rightarrow \quad f(x) = g(x) \quad \forall\, x \,\epsilon\, [a, b]$
3. $d(f, g) = \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\} \underset{*}{=} \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|g(x) - g(x)|\} = d(g, f)$
   * $|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)| \quad \forall\, x$
4. $d(f, g) = \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}$

$$\begin{aligned}
\max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - g(x)|\} &= \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\} \\
&\leq \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|\} \\
&\leq \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|f(x) - h(x)|\} + \max_{x \,\epsilon\, [a,b]} \{|h(x) - g(x)|\}
\end{aligned}$$

$\therefore \quad d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$

Ejemplo Probar que en el espacio de sucesiones $\{a_n\}$ de números reales tales que $\displaystyle\sum_1^\infty |a_n| < \infty$.

La aplicación $d(x_n, y_n) = \displaystyle\sum_1^\infty |x_n - y_n|$ es una distancia.

Prueba :

1. Como $|x_n - y_n| \geq 0 \quad \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N}$ entonces $\displaystyle\sum_1^\infty |x_n - y_n| \geq 0$
   por lo tanto $d(x_n, y_n) \geq 0$

2. $d(x_n, y_n) = 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n| = 0 \\
&\Rightarrow \quad |x_n - y_n| = 0 \qquad \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad x_n - y_n = 0 \qquad \forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \quad x_n = y_n
\end{aligned}$$

3. $d(x_n, y_n) = \sum_{1}^{\infty} |x_n - z_n|$

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{\infty} |x_n - z_n| \quad &\leq \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\
&= \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n| + \sum_{1}^{\infty} |y_n - z_n| \\
&= d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)
\end{aligned}$$

Métricas Inducidas por Normas

En un espacio vectorial X toda norma induce una métrica

Proposición 2. *Si X es un espacio normado*

$$d_2(x, y) = \|x - y\|$$

define una métrica

Demostración. Tenemos que

$$d_2(x, y) = \|x - y\| \geq 0 \quad \Rightarrow \quad d_2(x, y) \geq 0$$

$$d_2(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d_2(y, x)$$

$$d_2(x, z) = \|x - y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\| = d_2(x, y) + d_2(x, z)$$

□

Proposición 3. *Si d es una métrica en un espacio vectorial X y d es inducida por una norma en X, entonces*

$$d(x + \alpha, y + \alpha) = d(x, y)$$

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$$

Ejercicio Probar que la métrica discreta en un espacio vectorial no trivial X no puede obtenerse de una norma

Demostración. Tenemos que la métrica discreta esta definida por

$$d(a,b) = \begin{cases} 0 & a = b \\ 1 & a \neq b \end{cases}$$

vamos a ver que no cumple $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$, sea $\alpha = 2$ en este caso

$$si \quad x \neq y \quad entonces \quad d(\alpha x, \alpha y) = 1 \neq 2 = \alpha d(x,y)$$

por lo tanto la métrica discreta no es inducida por una norma $\square$

El espacio Topológico $\mathbb{R}^n$

Bolas abiertas, bolas cerradas y esferas.

Sea d una métrica y $\bar{x}_0$ un punto en $\mathbb{R}^n$

(1) La bola abierta con centro en $\bar{x}_0$ y radio $r > 0$, es el conjunto:
$B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}$

(2) La bola cerrada con centro $\bar{x}_0$ y radio $r \geq 0$ es el conjunto:
$\bar{B}(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$

(3) La esfera con centro $\bar{x}_0$ y radio $r \geq 0$ es el conjunto:
$S(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r\}$

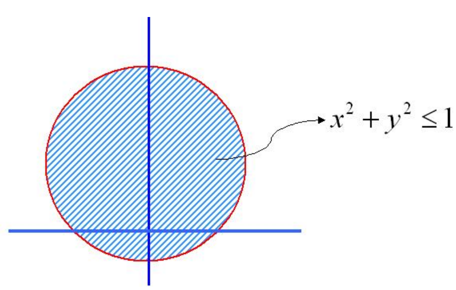
Observemos que para la bola abierta $r > 0$ estrictamente, mientras que la bola cerrada y la esfera pueden tener radio cero. En este último caso ambas se reducen a un punto:

$$\bar{B}(\bar{x}_0, 0) = \{\bar{x}_0\}$$

$$S(\bar{x}_0, 0 = \{\bar{x}_0\})$$

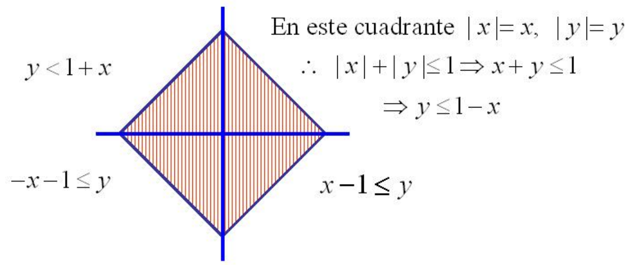
Los conjuntos $B(x_0, r)$, $\bar{B}(x_0, r)$ y $S(\bar{x}_0, r)$ son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y su aspecto depende de la métrica con la cual se midan las distancias.

Ejemplo: $B_2(0,1) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|_2 \leq 1\} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

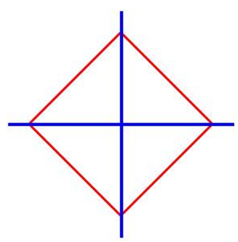


La periferia de este disco es el circulo que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 1$, que corresponde a la esfera $S_2(0,1) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|_2 = 1\}$.

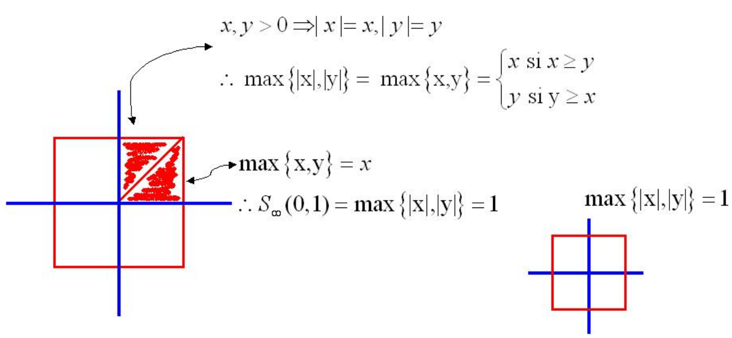
Ejemplo: Sea ahora la bola cerrada $\bar{B}_2(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\| \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$



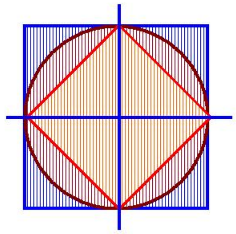
Para $S_1(0,1) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\| = 1\}$



Para $B_\infty(0,1) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\bar{x}\|_\infty \leq 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{max}\{|x|,|y|\} \leq 1\}$



tenemos entonces que



Intuitivamente

$B_1(x_0, r) \subset B_2(x_0, r) \subset B_\infty(x_0, r)$

Esto es la consecuencia de las desigualdades

$\| \bar{x} \|_\infty \leq \| \bar{x} \|_2 \leq \| \bar{x} \|_1$

que en forma explicita se escriben:

$$\mathbf{max}\{|x_1|, \cdots, |x_n|\} \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$