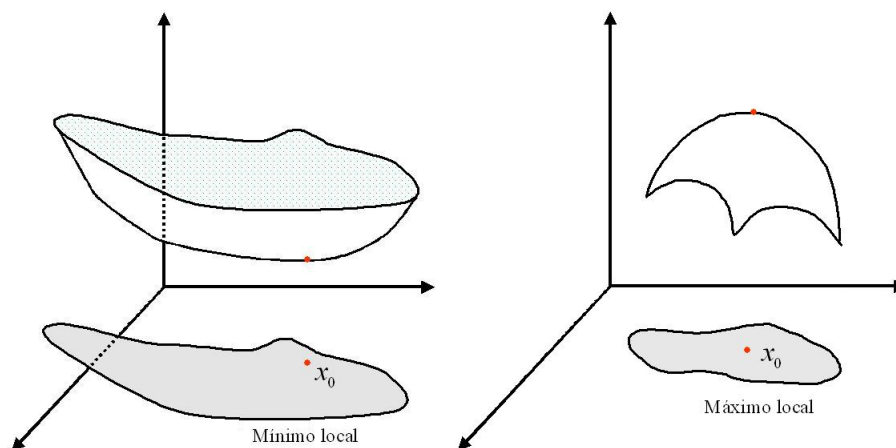


Extremos Locales

Entre las características geométricas básicas de la gráficas de una función están sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayor y menor.

Definición 1. Si $f : u \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función escalar, dado un punto $x_0 \in u$ se llama *mínimo local* de f si existe una vecindad v de x_0 tal que $\forall x \in v \quad f(x) > f(x_0)$. De manera análoga, $x_0 \in u$ es un *máximo local* si existe una vecindad v de x_0 tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in v$. El punto $x_0 \in u$ es un *extremo local o relativo*, si es un mínimo local o máximo local.



Un punto x_0 es un punto crítico de f si $Df(x_0) = 0$.

Un punto crítico que no es un extremo local se llama punto silla.

Teorema 1. Criterio de la primera derivada Si $u \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, la función $f : u \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable y $x_0 \in u$ es un extremo local entonces $\nabla f(x_0) = 0$, esto es x_0 es un punto crítico de f .

Demostración. Supongamos que t alcanza su máximo local en x_0 . Entonces para cualquier $h \in \mathbb{R}^n$ la función $g(t) = f(x_0 + th)$ tiene un máximo local en $t = 0$. Así, del cálculo de una variable $g'(0) = 0$ ya que como $g(0)$ es máximo local, $g(t) \leq g(0)$ para $t > 0$ pequeño

$$\therefore g'(0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Análogamente para $t < 0$ pequeño tomamos

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Ahora por regla de la cadena

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_n = \nabla f(x_0) \cdot h$$

Así $\nabla f(x_0) \cdot h = 0 \quad \forall h$ de modo que $\nabla f(x_0) = 0$. En resumen si x_0 es un extremo local, entonces $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$. En otras palabras $\nabla f(x_0) = 0$. ■

Ejemplo Hallar los máximos y mínimos de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

Solución: Debemos identificar los puntos críticos de f resolviendo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ para x, y ,

$$2x - 2 = 0 \quad 2y - 6 = 0$$

De modo que el punto crítico es $(1, 3)$. Como

$$f(x, y) = (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + 4 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$$

tenemos que $f(x, y) \geq 4$ por lo tanto en $(1, 3)$ f alcanza un mínimo relativo.

Ejemplo Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ entonces $\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$. f solo tiene un punto crítico en el origen, donde el valor de f es 4. Como

$$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$$

tenemos que $f(x, y) \leq 4$ por lo tanto en $(0, 0)$ f alcanza un máximo relativo.

Ejemplo En el siguiente ejemplo mostramos que no todo punto crítico es un valor extremo. Sea $f(x, y) = x^2y + y^2x$ tenemos que sus puntos críticos son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 = 0$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 2xy + y^2 = 0 \\ 2xy + x^2 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = y \\ x = -y \end{pmatrix}$$

tomando $x = -y$ tenemos que

$$2xy + y^2 = 0 \Rightarrow -2y^2 + y^2 = 0 \Rightarrow -y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

tomando $x = y$ tenemos que

$$2xy + y^2 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y^2 = 0 \Rightarrow -3y^2 = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$$

por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico.

Ahora bien para $f(x, y)$ tomamos $x = y$

$$f(x, x) = 2x^3$$

la cual es $(< 0$ si $x < 0$) y $(> 0$ si $x > 0$) por lo tanto el punto crítico $(0, 0)$ no es ni máximo ni mínimo local de f

Ahora bien para $f(x, y)$ tomamos $x = -y$

$$f(x, -x) = 0 \quad \forall x$$

por lo tanto el punto crítico $(0, 0)$ no es ni máximo ni mínimo local de f



Requerimos un criterio que dependa de la segunda derivada para que un punto sea extremo relativo. En el caso particular $n = 1$ el criterio es $f''(x) > 0$ y $f''(x) < 0$ para máximo o mínimo respectivamente para el contexto de varias variables usaremos el hessiano el cual esta definido por

$$Hf(x_0)h = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 t}{\partial x_i \partial x_j} (x_0|_{x_i x_j}).$$

Recordando un poco de la expresión de Taylor

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p (y - y_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right)$$

La expresión en rojo

$$\frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right)$$

Define una forma cuadrática que podemos escribir

$$\frac{1}{2!} (x - x_0 \quad y - y_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Teorema 2. Sea $B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$ y $H(h) = \frac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ entonces $H(h)$ es definida positiva si y solo si $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.

Demostración. Tenemos

$$H(h) = \frac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} ah_1 & bh_2 \\ bh_1 & ch_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2)$$

si completamos el cuadrado

$$H(h) = \frac{1}{2}a \left(h_1 + \frac{b}{a}h_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(c - \frac{b^2}{a} \right) h_2^2$$

supongamos que h es definida positiva. Haciendo $h_2 = 0$ vemos que $a > 0$. Haciendo $h_1 = -\frac{b}{a}h_2$ $c - \frac{b^2}{a} > 0$ ó $ac - b^2 > 0$ De manera analoga $H(h)$ es definida negativa si y solo si $a < 0$ y $ac - b^2 > 0$. ■

Criterio del máximo y del mínimo para funciones de dos variables Sea $f(x, y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto u de \mathbb{R}^2 . Un punto x_0, y_0 es un mínimo local (Estricto) de f si se cumple las siguientes tres condiciones:

- I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
- II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$
- III) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$ en (x_0, y_0) (Discriminante)

Si en II) tenemos < 0 en lugar de > 0 sin cambiar III) hay un máximo local



Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = 2(x - 1)^2 + 3(y - 2)^2$ tenemos entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x - 1) \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 6(y - 2)$$

por lo tanto $\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow x = 1$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 2$ por lo tanto $x_0 = (1, 2)$ es un punto crítico

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad H(1, 2) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24 > 0 \quad \forall (x, y) \in B_\epsilon(1, 2)$$

podemos decir que f tiene un mínimo relativo en $(1, 2)$

