

Funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^n$  (Funciones Vectoriales)

Llamaremos función vectorial de variable real o simplemente función vectorial, a aquellas con dominio en un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y contradominio en un espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$ . De esta manera una función vectorial  $f$  asocia a cada elemento  $t$  de un conjunto  $A$  de números reales, un único vector  $f(t)$ .

Puesto que  $f(t)$  es un punto en el espacio  $\mathbb{R}^n$ , éste tiene  $n$  coordenadas, las cuales son en general, funciones de la variable  $t$ . Así podemos escribir

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

**Nota:** Observemos que cada una de las componentes  $x_i(t)$  de una función vectorial es una función real (de variable real) y que las llamadas ecuaciones paramétricas se obtienen precisamente al expresar cada una de las componentes en función del parámetro. Así pues, las ecuaciones paramétricas definen una función vectorial y viceversa.

Una ecuación en dos variables define un lugar geométrico que por lo general, y para nuestros propósitos, será una curva plana. Cuando este lugar geométrico se define mediante ecuaciones paramétricas y pensando que un punto se mueve sobre la curva conforme el parámetro recorre el dominio, tendremos que las ecuaciones paramétricas definirán, además el lugar geométrico, el sentido en que la curva es recorrida, el punto de partida, la rapidez con la que se hace el recorrido, qué porción de la curva se considera (variando el dominio) y si la curva es cerrada, cuantas veces se recorre

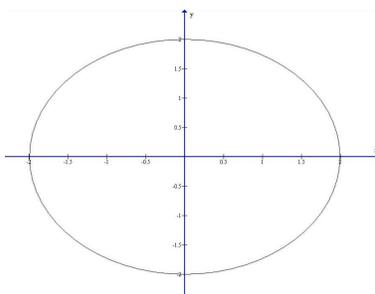
En los cursos de Geometría Analítica, ya han sido consideradas funciones de este tipo, por ejemplo, la ecuación vectorial de una recta  $L$ , en el espacio, que pasa por un punto  $P_0$  y que es paralela a un vector  $\vec{a}$ , que puede darse en la función

$$L = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = P_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}\}$$

en donde, si consideramos que  $P_0$  es un punto fijo y  $\vec{a}$  es un vector también constante, entonces tenemos que  $P$  es una función vectorial del parámetro real  $t$ , es decir, cada valor de  $t$  está asociado con un punto  $P$  de la recta.

**Ejemplo.-** Si  $f$  es la función vectorial por  $f(t) = (2 \cos(t), 2 \sin(t))$  con  $t \in [0, 2\pi]$ , tenemos entonces que  $f$  asocia a cada número real  $t$  en el intervalo  $t \in [0, 2\pi]$ , un par ordenado  $(x, y)$  con  $x = 2 \cos t$  y  $y = 2 \sin t$ , que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio 2 y centro en el origen.

Así pues la gráfica de  $f$  es una circunferencia.



Cada una de las funciones vectoriales que se dan a continuación, define el mismo lugar geométrico o una parte de éste; sin embargo, el sentido, el punto de partida y la rapidez de recorrido así como la porción de la curva que se considera en cada caso varía.

$$f_1(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f_2(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f_3(t) = (2 \cos 3t, 2 \sin 3t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$f_4(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

$$f_5(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad t \in [0, 6\pi]$$

$$f_6(t) = (2 \cos t, 2 \sin t) \quad t \in [-\pi, \pi]$$

Para una función vectorial en  $\mathbb{R}^3$  decimos que: Si  $D$  es un conjunto de  $\mathbb{R}$ , entonces  $f(t)$  es una función vectorial con dominio  $D$  si y sólo si, para todo  $t \in D$

$$f(t) = x_1(t)i + x_2(t)j + x_3(t)k$$

donde  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  y  $x_3(t)$  son funciones escalares con dominio  $D$ .

### Gráficas de Funciones Vectoriales

Si  $f(t)$  es una función vectorial en el espacio 2 o en el espacio 3, entonces la gráfica de  $f(t)$  se define como la curva paramétrica descrita por las funciones de las componentes de  $f(t)$ .

Ejemplo.-Gráficar la función vectorial cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$f(t) = \left( \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$$

En este caso haciendo la sustitución  $t = \tan\left(\frac{u}{2}\right)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1-t^2}{1+t^2} &= \frac{1-\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{2u}{2}\right) = \cos(u) \end{aligned}$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \tan\left(\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)} = 2 \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = 2 \frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2u}{2}\right) = \operatorname{sen}(u)$$

donde  $u \in [0, \pi]$ .

al ser

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u) = 1$$

se trata de una circunferencia con centro en el origen



### Dominio de una función Vectorial

El dominio de una función vectorial  $r(t)$  es el conjunto de valores permitidos de  $t$ . Si  $r(t)$  se define en términos de las funciones de las componentes y no se especifica explícitamente el dominio, entonces se sobreentiende que el dominio es la intersección de los dominios naturales de las funciones de las componentes, por lo que éste recibe el nombre de dominio natural de  $r(t)$ . Sea

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

entonces el  $Dom(f) = \bigcap_{i=1}^n x_i(t)$

Ejemplo.-Halle el dominio de la función vectorial  $f(t) = (t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$

Sol. tenemos que

$$Si \ x_1(t) = t^2 \text{ entonces } Dom(x_1(t)) = \mathbb{R}$$

$$Si \ x_2(t) = \sqrt{t-1} \text{ entonces } Dom(x_2(t)) = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 1\}$$

$$Si \ x_3(t) = \sqrt{5-t} \text{ entonces } Dom(x_3(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 5 \geq t\}$$

Por lo tanto

$$Dom(f(t)) = \bigcap \{Dom(x_1(t)), Dom(x_2(t)), Dom(x_3(t))\} = \{t \in \mathbb{R} | 1 \leq t \leq 5\}$$

Ejemplo.-Halle el dominio de la función vectorial  $f(t) = (Ln(t), \frac{t}{t-1}, e^{-t})$

Sol. tenemos que

$$Si \ x_1(t) = Ln(t) \text{ entonces } Dom(x_1(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 0 < t\}$$

$$Si \ x_2(t) = \frac{t}{t-1} \text{ entonces } Dom(x_2(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 1 \neq t\}$$

$$Si \ x_3(t) = e^{-t} \text{ entonces } Dom(x_3(t)) = \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$Dom(f(t)) = \bigcap \{Dom(x_1(t)), Dom(x_2(t)), Dom(x_3(t))\} = \{t \in \mathbb{R} | 0 < t, \ t \neq 1\}$$

### Límites de Funciones Vectoriales

**Definición 1.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial definida para todos los valores de  $t$  en alguna vecindad de un punto  $t_0$ , excepto quizá en  $t_0$ . Entonces se dice que el límite de la función  $f$  cuando  $t$  se acerca a  $t_0$  es  $L \in \mathbb{R}^n$  y se expresa como

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

si y solo si  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $\|f(t) - L\| < \epsilon$  siempre que  $|t - t_0| < \delta$

**Teorema 1.** Si  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial, entonces

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = l_i$$

Donde  $f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$



*Demostración.* Si

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

entonces  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $0 < |t - t_0| < \delta$ , entonces  $\|f(t) - L\| < \epsilon$ . Pero como

$$\|f(t) - L\| = \|x_1(t) - l_1, \dots, x_n(t) - l_n\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

se tiene que

$$|x_i(t) - l_i| \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Por lo tanto dado  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon$  por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = l_i$$

Recíprocamente

Supongamos ahora que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = l_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Esto quiere decir que  $\forall \epsilon_i > 0 \exists \delta_i > 0$  tal que  $0 < |t - t_0| < \delta_i \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon_i$ .

Sea  $\epsilon > 0$  y sea  $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$  tomamos  $\delta = \mathbf{min}(\delta_1, \dots, \delta_n)$ .

Para esta  $\delta$  se tiene  $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \forall i = 1, \dots, n$ , entonces

$$\|f(t) - L\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = L$$

□

**Ejemplo:** Se sabe que

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t, t) = (2, 2)$$

Puesto que  $\epsilon > 0$ , determine  $\delta > 0$  que verifique la validez del límite.

Tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t, t) = \left( \lim_{t \rightarrow 2} t, \lim_{t \rightarrow 2} t \right) = (2, 2)$$

$\therefore$  Según la definición

$$\|(t, t) - (2, 2)\| = \sqrt{(t-2)^2 + (t-2)^2} = \sqrt{2(t-2)^2} = \sqrt{2}|t-2|$$

$$\therefore \text{ si } \sqrt{2}|t-2| < \epsilon$$

podemos definir a  $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$



**Ejemplo:** Se sabe que

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t, t^3) = (2, 8)$$

Puesto que  $\epsilon > 0$ , determine  $\delta > 0$  que verifique la validez del límite.

Tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t, t^3) = \left( \lim_{t \rightarrow 2} t, \lim_{t \rightarrow 2} t^3 \right) = (2, 8)$$

Ahora bien

$$\lim_{t \rightarrow 2} t = 2 \Leftrightarrow \text{Para } \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \exists \delta_1 > 0 \text{ tal que } 0 < |t - 2| < \delta_1 \Rightarrow |t - 2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} t^3 = 8 \Leftrightarrow \text{Para } \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \exists \delta_2 > 0 \text{ tal que } 0 < |t - 2| < \delta_2 \Rightarrow |t^3 - 8| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto si consideramos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  se tiene

$$\|(t, t^3) - (2, 8)\| = \sqrt{(t-2)^2 + (t^3-8)^2} < \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2 \frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 2} (t, t^3) = (2, 8)$$

### Continuidad de Funciones Vectoriales

**Definición 2.** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función vectorial. Se dice que  $f$  es continua en  $t_0$  si y solo si se cumple que

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0)$$

