Funciones de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Una funcion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función cuyo dominio es un subconjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Denotada por $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ donde a cada $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ f le asigna un vector $f(x) \in \mathbb{R}^m$.

Ejemplo.- La función $f(x, y) = x^2 + y^2$ asocia a la pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el número real $x^2 + y^2$. El dominio de f en este caso es todo $\mathbb{R}^2$

Ejemplo.- La función $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ asocia a la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el número real $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ donde el dominio de f es $Dom_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Ejemplo.- La función $f : \mathbb{R}^3 \to \not\vDash$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x + y + z)$ asocia a la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el vector $(x^2 + y^2 + z^2, x + y + z) \in \mathbb{R}^2$. Donde f tiene por dominio todo $\mathbb{R}^3$, pero su imagen contiene sólo los vectores $\mathbb{R}^2$ cuya primera coordenada es no negativa.

Ejemplo.- La función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y, z) = (3x + 4, 3y + 5z)$ asocia a la terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el vector $(3x + 4, 3y + 5z) \in \mathbb{R}^2$ a esta función podemos pensarla como un producto de matrices es decir

$$\begin{pmatrix} 3x + 4y \\ 3y + 5z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Definición 1. *Dada la función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definimos su gráfica como el subconjunto $\mathbb{R}^{n+1}$ $\{(x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} | (x_1, ..., x_n) \in \Omega\}$*

Límite de Funciones de $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Definición 2. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea x_0 un punto de acumulación de Ω. Se dice que $b \,\epsilon\, \mathbb{R}^m$ es el límite de f en x_0, y se denota por:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b$$

Si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ cuando $x \in \ \Omega$, cumple $0 < \|x - x_0\| < \delta$

Observación: Es necesarío que x_0 sea punto de acumulacion de Ω.

Ejemplo.- El límite de la función $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ cuando $(x, y) \to (0, 0,)$ según la recta $y = 2x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2 + (2x)^2} = \frac{1}{5}$$

Ejemplo.- El límite $f(x, y) = \dfrac{8x^3y^3}{(x^2 + y^2)^3}$ cuando $(x, y) \to (0, 0)$ según la recta $x = y$

$$\lim_{x \to 0} \frac{8x^6}{(2x^2)^3} = \lim_{x \to 0} \frac{8x^6}{8x^6} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Ejemplo.- El límite $f(x,y) = \dfrac{2x^2y}{x^4+y^2}$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ según la recta $x = y$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} \underset{x=y}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

Usando la definición de límite, demostrar que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Por demostrar, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$ entonces $\left|\dfrac{x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| < \varepsilon$

como $x^2 \le x^2 + y^2$ entonces $x^4 \le (x^2+y^2)^2$ entonces $\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2} \underset{(*)}{\le} \dfrac{1}{x^4}$

$\therefore \quad \left|\dfrac{x^4y^2}{(x^2+y^2)^2}\right| \underset{(*)}{\le} \left|\dfrac{x^4y^2}{x^4}\right| \le |y^2| = y^2 \le (\sqrt{x^2+y^2})^2 < \delta^2$

$\therefore \quad$ Si $\delta^2 = \varepsilon$ entonces $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

Proposición 1. *(Unicidad del límite). Sea $A \subset \mathbb{R}^m$, f una función : $A \to \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulación de A. Si $\bar{l}_1 \in \mathbb{R}^m$ y $\bar{l}_2 \in \mathbb{R}^m$ son tales que:*

$$\left.\begin{array}{l} \bar{l}_1 = \lim\limits_{x\to x_0} f(\overline{x}) \\ \bar{l}_2 = \lim\limits_{x\to x_0} f(\overline{x}) \end{array}\right\} \qquad \textit{Entonces} \qquad \bar{l}_1 = \bar{l}_2$$

Demostración. Supongamos que $\overline{l_1} \neq \overline{l_2}$ entonces definimos $\epsilon = \|\overline{l_1} - \overline{l_2}\| > 0$ y tenemos que

$$\|\bar{l}_1 - \bar{l}_2\| = \|\bar{l}_1 - f(\overline{x}) + f(\overline{x}) - \bar{l}_2\| \le \|\bar{l}_1 - f(\overline{x})\| + \|f(\overline{x}) - \bar{l}_2\|$$

como

$$\|\bar{l}_1 - f(\overline{x})\| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad \|f(\overline{x}) - \bar{l}_2\| < \frac{\epsilon}{2}$$

entonces

$$\|\bar{l}_1 - \bar{l}_2\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon = \|\overline{l_1} - \overline{l_2}\|$$

lo cual no puede ocurrir $\therefore \qquad \bar{l}_1 = \bar{l}_2$ □

Proposición 2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$, tal que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Entonces para cada función real y continua g definida en una bola alrededor de a, tal que $g(a) = b$ se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x, g(x)) = L$$

Demostración. Por la existencia del limite doble, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|(x,y)-(a,b)\| < \delta \;\Rightarrow\; \|f(x,y)-L\| < \epsilon$$

Ahora por la continuidad de g, tenemos dado $\delta > 0$ existe un $\sigma > 0$, con $0 < \sigma \leq \delta$ tal que

$$|x-a| < \sigma \;\Rightarrow\; |g(x)-b| < \delta$$

Por tanto si $|x-a| < \sigma$, se tiene que $\|(x,g(x))-(a,b)\| < \delta$. Con lo cual

$$\|f(x,g(x))-L\| < \epsilon$$

$\square$

Ejemplo Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y} & y \neq -x^2 \\ 1 & y = -x^2 \end{cases}$ y sea $g(x) = mx^2$

Por lo tanto tenemos que

$$f(x,g(x)) = f(x,mx^2) = \frac{mx^2}{x^2+mx^2} = \frac{m}{1+m} \quad m \neq -1$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} f(x,g(x)) = \frac{m}{1+m}$$

el cual depende del valor de m, por lo que dicho limite no existe

Ejemplo.- Determinar si existe, el límite de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para determinar su límite podemos acercarnos por trayectorias (funciones continuas) al origen. Pongamos $y = g(x) = 0$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^2+0^2} = 0$$

Pongamos ahora $y = g(x) = x$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0$$

Lo anterior nos dice que si existe el límite, éste tendría que ser 0, para comprobarlo usaremos la definición, se tiene entonces que debemos hallar un $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$ siempre que $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$. Observamos que

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2||y|}{|x^2+y^2|} = \frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{\|\overline{x}\|^2\|\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|^2} = \|\overline{x}\| < \delta.$$

$\therefore$ podemos tomar $\delta = \epsilon$

Ejemplo.- Determinar si existe, el límite de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para determinar su límite podemos acercarnos por trayectorias (funciones continuas) al origen. Pongamos $y = g(x) = x$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2+x^2} = \frac{1}{2}$$

Pongamos $y = g(x) = 0$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) = \lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x(0)}{x^2+0^2} = 0$$

como $\frac{1}{2} \neq 0$ entonces $\nexists$ el límite de la función

Proposición 3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y f una función $f : A \to \mathbb{R}^m$ x_0 un punto de acumulación de A. Escribimos f en términos de sus componentes $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Entonces, la existencia del límite $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x})$ es equivalente a la existencia de los límites $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f_i(\overline{x})$ para $i = 1, \ldots, m$. En este caso se tiene además que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \left(\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f_1(\overline{x}), \ldots, \lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f_m(\overline{x})\right)$*

Demostración. ($\Rightarrow$)Supongamos que existe el límite $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ y mostraremos que para cada $i = 1, \ldots, m$ $|f_i(\overline{x}) - l_i| \to 0$.
Pero esto se sigue de las desigualdades

$$0 \leq |f_i(\overline{x}) - l_i| \leq \|f_i(\overline{x}) - l_i\| \to 0$$

($\Leftarrow$) Supongamos que existen los límites $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f_i(\overline{x}) = l_i$ para $i = 1, \ldots, m$ y sea $\overline{l} = (l_1, \ldots, l_m)$ tenemos entonces $|f_i(\overline{x}) - l_i| \to 0$ para $i = 1, \ldots, m$

$\therefore \qquad 0 \leq \|f(x) - l\| \leq \sum\limits_{i=1}^{m} |f_i(x) - l_i|$

$\therefore \qquad \|f(x) - l\| \to 0$ $\square$

Proposición 4. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ y x_0 un punto de acumulación. Entonces la condición $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{l}$, es equivalente a $\lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}^k) = l$ para toda sucesión $(\overline{x}^k)_{k=1}^{\infty}$ de elementos de A, con puntos diferentes de $\overline{x}_0$, tienda a $\overline{x}_0$.*

Demostración. ($\Rightarrow$)Supongamos que $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f_i(\overline{x}) = \overline{l}$ y sea $\{x_k\}_1^{\infty}$ una sucesión arbitraria de elementos de A con $\overline{x}_k \neq \overline{x}_0$, que tiende a $\overline{x}_0$. Mostraremos usando la definición de límite de una sucesión que $f(\overline{x}^k) \to \overline{l}$.
Sea $r > 0$ arbitraria, como $\lim\limits_{\overline{x}\to\overline{x}_0} f(\overline{x}) = \overline{l}$ existe $\rho > 0$ tal que $\|f(\overline{x}) - l\| < r$ para todo $x \,\epsilon\, A$ que cumpla $0 < \|\overline{x} - x_0\| < \rho$.

Por otra parte, como $\overline{x}_k \to \overline{x}_0$ existe $N \,\epsilon\, \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x} - x_0\| < \rho$ para todo k, con $k \leq N$. Por lo tanto $\|f(\overline{x}) - l\| < r$ para todo $k > N$
$\therefore \qquad \lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) = \overline{l}$
($\Leftarrow$)Supongamos que $\lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) = \overline{l}$ para toda $\{x_k\}_1^\infty$ en A, de puntos distintos de $\overline{x}_0$, convergene a $\overline{x}_0$ sucesión $\{x_k\}_1^\infty$ en A, de puntos distintos de $\overline{x}_0$, convergente a $\overline{x}_0$.
Si no se tuviese $\lim\limits_{x\to x_0} f(\overline{x}) = l$ existe $r_0 > 0$ tal que para cada $\rho > 0$, seria posible encontrar un punto $\overline{x} \,\epsilon\, A$ tal que $0 < \|\overline{x} - \overline{x}_0\| < \rho$ pero $\|f(x) - \overline{l}\| \geq r_0$. En particular para cada $k \,\epsilon\, \mathbb{N}$, habia un punto $\overline{x}_k \,\epsilon\, A$ tal que $0 < \|x_k - \overline{x}_0\| < 1/k$ y $\|f(x_k) - \overline{l}\| \geq r_0$. Es claro que la sucesión $\{x_k\}_1^\infty$ asi construida al vector $\overline{x}_0$, pero $\lim\limits_{k\to\infty} f(\overline{x}_k) \neq l_\sharp$ $\square$

Ejemplo.- Determinar si existe, el límite de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Vamos a considerar la sucesiones $x_n = \frac{1}{n}$ y $y_n = \frac{1}{n}$ y vamos aproximarnos al origen por sucesiones que tienden a cero, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$$

Para comprobar que éste es el límite usamos la definición, se tiene entonces que dado $\epsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$ siempre que $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta$, observamos que

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{xx^2}{x^2+y^2}\right| \leq |x| \leq \|\overline{x}\| < \delta.$$

por tanto tomamos $\delta = \epsilon$

Límite Iterados

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y (a,b) un punto en $\mathbb{R}^2$, para cada x fijo consideramos que exista el límite $f_1(x) = \lim\limits_{y\to b} f(x,y)$. Analogamente para cada y fijo consideramos que existe $f_2(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x,y)$ se llaman límites reiterados a los límites

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = \lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x,y))$$

$$\lim_{x\to b} f_2(x) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x,y))$$

1. Si existe $f_1(x)$, $f_2(x)$ y el límite doble $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$, entonces existen los limites reiterados y son iguales a L.
2. Si existen los límites reiterados y son diferentes, entonces no existe el límite doble.

3. Pueden existir los limites reiterados, ser iguales y no existir el límite doble.

Ejemplo: Calculese, si existen, los límites reiterados y el límite doble en $(0,0)$ de las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$.

1. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{y-x^2} & y \neq x^2 \\ 0 & x = y^2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y}{y-x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{0-x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{y}{y-x^2} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y-0^2} = 1$$

$\therefore$ el límite doble $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.

2. Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

Si nos acercamos al origen por rectas $y = mx$ obtenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2mx^2}{x^2+mx^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 2m}{x^2(1+m)} = \lim_{x\to 0}\frac{2m}{1+m} = \frac{2m}{1+m}$$

Este resultado varia según el valor de m
$\therefore$ la función no tiene límite en $(0,0)$. La condición de que existen y sean iguales los límites iterados no es suficiente para la existencia del límite.

Problema: Probar que

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\left(\dfrac{1}{y}\right), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Tiene límite 0 cuando $(x,y) \to (0,0)$ pero los límites iterados son distintos

$$\lim_{y\to 0} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{No existe} \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) \quad \text{tampoco existe}$$

$$\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0 \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} x\sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

Una de las condiciones necesarias para que el límite de la función coincida con los límites iterados es que ambos existan
Dado $\varepsilon > 0$ basta elegir $\delta = \varepsilon$

$$\begin{aligned} \|(x,y)\| < \delta \quad &\Rightarrow |x| < \delta \qquad |y| < \delta \\ &\Rightarrow |x \sin\left(\tfrac{1}{y}\right)| \leq |x| < \delta \\ &\Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon \end{aligned}$$

Proposición.- Se considera la función $z = f(x,y)$. Supongamos que existen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y), \quad \lim_{x\to x_0} f(x,y) \quad y \quad \lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

Probar que existe

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right), \quad \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right)$$

y ademas se cumple que

$$\lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = L = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Demostración.- Probaremos que si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} = L$ y $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = G(y)$, entonces

$$\lim_{y\to y_0} G(y) = L$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Por hipotesis existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$|f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad si \quad \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1$$

Tambien tenemos que

$$|f(x,y) - G(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $|x - x_0| < \delta_2$ tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

$$|G(y) - L| = |G(y) - f(x,y) + f(x,y) - L| \leq |G(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

si $|y - y_0| < \delta$ lo que prueba que $\lim\limits_{y\to y_0} G(y) = L$

Este resultado nos muestra que para la existencia e igualdad de los límites iterados no es sificiente la existencia del límite de la función hace falta también la existencia de los límites de funciones de una variable.

Límite con cambio a coordenadas polares

Sea $A = (0, \infty) \times (0, 2\pi]$ y sea $g : A \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(\rho, \theta) = (\rho\cos(\theta), \rho\cos(\theta))$. Vamos a demostrar que g es una biyección continua de A sobre $B = \mathbb{R}^2 - \{\overline{0}\}$ tal que

$$g\{(\rho, \theta)|0 < \rho < r, 0 < \theta < 2\pi\} = B((0,0), r) - \{\overline{0}\}$$

Demostración.- Como ambas componentes de g son contiuas g será continua. Por otra parte

$$g(\rho, \theta) = g(\rho', \theta') \Rightarrow (\rho\cos(\theta), \rho\,\mathrm{sen}(\theta)) = (\rho'\cos(\theta'), \rho'\,\mathrm{sen}(\theta'))$$

$$\Rightarrow \rho\cos(\theta) = \rho'\cos(\theta') \quad \rho\,\mathrm{sen}(\theta) = \rho'\,\mathrm{sen}(\theta') \Rightarrow \rho = \rho' \quad \theta = \theta'$$

$\therefore$ g es inyectiva.
Ahora bien dado $(x, y) \in B$ si $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \Rightarrow (\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}) \in B(0, 1)$ con lo cual existe $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$ y $\mathrm{sen}(\theta) = \frac{y}{\rho}$ luego $g(\rho, \theta) = (x, y)$ $\therefore g : A \to B$ es una biyección

Una consecuencia de lo anterior es lo siguiente $\forall\theta \in (0, 2\pi]$ se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L \Leftrightarrow \quad \textit{Dado} \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad \delta > 0 \quad \textit{tal} \quad \textit{que} \quad 0 < \rho < \delta \Rightarrow |g(\rho, \theta) - L| < \epsilon$$

Ejemplo Determinar si existe, el límite de la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Vamos a considerar el cambio de variables polares se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^4(\theta)\rho\,\mathrm{sen}(\theta)}{\rho^4\cos^4(\theta) + \rho^4\,\mathrm{sen}^4(\theta)} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\cos^4(\theta)\,\mathrm{sen}(\theta)}{\cos^4(\theta) + \mathrm{sen}^4(\theta)}\rho = 0$$

Para comprobar que éste es el límite usamos la definición, se tiene entonces que dado $\epsilon > 0$ debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{x^4 y}{x^4 + y^4}\right| < \epsilon$ siempre que $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$, observamos que

$$\left|\frac{x^4 y}{x^4 + y^4}\right| \leq \left|\frac{x^4 y}{x^4}\right| = |y| \leq \|(x, y)\| < \delta.$$

por tanto tomamos $\delta = \epsilon$