28/01/2014

Parametrización de curvas

Parametrizar una curva consiste en determinar las ecuaciones que en base a una cantidad variable (parámetro) determinan una trayectoria.

Ejemplo: parametrizar la recta ℓ que pasa por $(2,1)$, $(-2,3)$

$$\Rightarrow (x,y) = (2,1) + t((-2,3)-(2,1))$$
$$= (2,1) + t(-4,2)$$

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} x = 2-4t \\ y = 1+2t \end{array} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

otra forma:

Sacamos la pendiente $m = \frac{3-1}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow y-1 = -\tfrac{1}{2}(x-2)$$

Sea $x = t \quad \Rightarrow y = -\frac{1}{2}(t-2)+1 = -\frac{t}{2}+2$

$$\therefore \boxed{\begin{array}{l} x = t \\ y = -\frac{t}{2}+2 \end{array} \quad \forall t \in \mathbb{R}}$$

Ejemplo: parametrizar la circunferencia $3x^2+3y^2=1$

Recordando que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \ \ldots$ ☆

$$\Rightarrow 3x^2 = \cos^2\theta \quad y \quad 3y^2 = \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x = \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta \quad y \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}}$$ (tomando la raíz positiva)

Ejemplo: parametrizar la elipse $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1 \quad \overset{\text{usando ☆}}{\Rightarrow} \quad \frac{x-h}{a} = \cos\theta \quad y \quad \frac{y-k}{b} = \operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{x = a\cos\theta + h \ , \ y = b\operatorname{sen}\theta + k \quad 0 \le \theta \le 2\pi} \ \ldots \ ①$$

28/01/2014

Parametrizar $4x^2-16x+9y^2-20=0$

$\Rightarrow$ completando cuadrados $4(x^2-4x)+9y^2=20$

$\Rightarrow 4(x^2-4x+4)+9y^2=20+16=36$

$\Rightarrow 4(x-2)^2+9y^2=36 \Rightarrow \dfrac{(x-2)^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

$\therefore$ aplicando ①
$$\boxed{\begin{array}{ll} x=3\cos\theta+2 & \\ y=2\operatorname{sen}\theta & 0\leq\theta\leq 2\pi \end{array}}$$

Ejemplo: parametrizar la hipérbola $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x-h}{a}\right)^2-\left(\dfrac{y-k}{b}\right)^2=1$

Recordando la identidad $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta$ ó $\sec^2\theta-\tan^2\theta=1$

$\Rightarrow \dfrac{x-h}{a}=\sec\theta$ y $\dfrac{y-k}{b}=\tan\theta$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} x=a\sec\theta+h & \\ y=b\tan\theta+k & 0\leq\theta\leq 2\pi \end{array}} \quad \cdots ②$$

Parametrizar $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$

$\Rightarrow 9(x^2-2x)-4(y^2+4y)=43$

$\Rightarrow 9(x^2-2x+1)-4(y^2+4y+4)=43+9-16=36$

$\Rightarrow 9(x-1)^2-4(y+2)^2=36$

$\Rightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=1 \Rightarrow$ usando ②

$$\boxed{\begin{array}{ll} x=2\sec\theta+1 & \\ y=3\tan\theta-2 & 0\leq\theta\leq 2\pi \end{array}}$$

Ejemplo: parametrizar la parábola $(x-h)^2=4p(y-k)$ $p\neq 0$

De la última identidad trigonométrica $\tan^2\theta=\sec^2\theta-1$

$\Rightarrow x-h=\tan\theta$ y $4p(y-k)=\sec^2\theta-1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x=\tan\theta+h \quad y \quad y=\frac{1}{4p}(\sec^2\theta-1)+k \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{array}}$$

28/01/2014

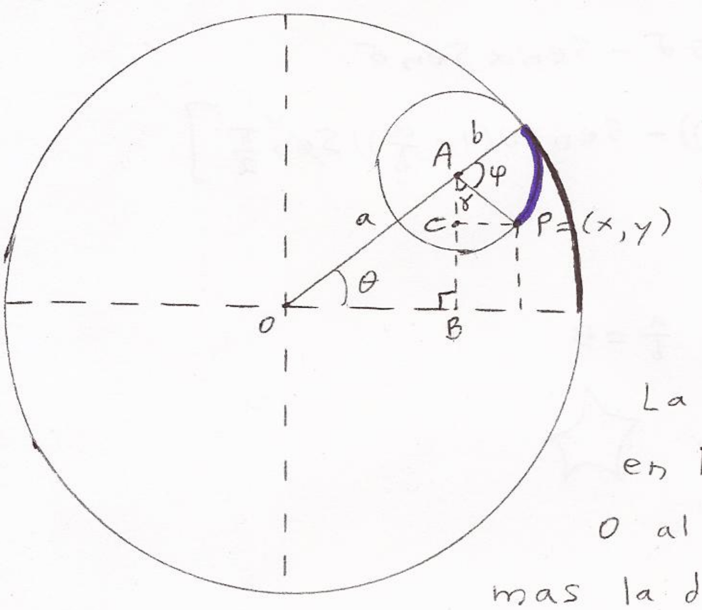
Parametrizar $y^2-4y-3x+1=0$

$\Rightarrow \quad y^2-4y+4=3x-1+4 \quad \Rightarrow (y-2)^2=3(x+1)$

$\Rightarrow \quad y-2=\tan\theta \quad , \quad 3(x+1)=\sec^2\theta-1$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=\frac{1}{3}(\sec^2\theta-1)-1 \\ y=\tan\theta+2 \end{array}}$$

Hipocicloide



La hipocicloide es la curva que describe un punto P de una circunferencia inscrita dentro de otra, de mayor tamaño, en donde la circunferencia menor rueda sobre la otra (la mayor) sin resbalar.

La coordenada x del punto P consiste en la suma de las distancias del origen O al centro de la circunferencia menor, mas la distancia de dicho centro al punto P.

Analizando el ΔOAB tenemos que $x'=(a-b)\cos\theta$, y del ΔAPC $x''=b\,\mathrm{sen}\,\gamma$

$\Rightarrow x=x'+x''=(a-b)\cos\theta+b\,\mathrm{sen}\,\gamma \quad \ldots \quad (3)$

Por otro lado, de la imagen se observa que $\gamma+\varphi+\frac{\pi}{2}-\theta=\pi$

$\Rightarrow \gamma=\frac{\pi}{2}+\theta-\varphi \quad \ldots \quad (4)$

Ahora bien, como la circunferencia de radio b rueda sobre la de radio a $\Rightarrow$ la longitud de arco morado es igual a la longitud de arco negro, i,e, $a\theta=b\varphi \quad \Rightarrow \varphi=\frac{a}{b}\theta \ldots (5)$

$\Rightarrow$ de (4) $\quad \gamma=\frac{\pi}{2}+\theta(1-\frac{a}{b})$ y sustituyendo en (3)

$x=(a-b)\cos\theta+b\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}+\theta(1-\frac{a}{b}))$

28/01/2014

Utilizando que $\operatorname{sen}(\alpha+\delta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\delta+\operatorname{sen}\delta\cos\alpha$

$$\Rightarrow x=(a-b)\cos\theta+b\left[\cancelto{1}{\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}}\cos\left(\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)+\operatorname{sen}\left(\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)\cancelto{0}{\cos\tfrac{\pi}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{x=(a-b)\cos\theta+b\cos\left(\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)}$$

Para la coordenada y del punto P, tenemos que debe ser la longitud del $\overline{AB}$ menos la longitud del $\overline{AC}$

$\Rightarrow$ del ΔOAB $y'=(a-b)\operatorname{sen}\theta$, y del ΔAPC $y''=b\cos\gamma$

$$\Rightarrow y=y'-y''=(a-b)\operatorname{sen}\theta-b\cos\gamma=(a-b)\operatorname{sen}\theta-b\cos\left(\tfrac{\pi}{2}+\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)$$

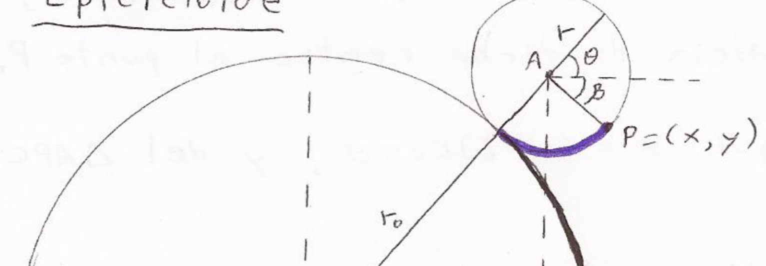
Utilizando que $\cos(\alpha+\delta)=\cos\alpha\cos\delta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\delta$

$$\Rightarrow y=(a-b)\operatorname{sen}\theta-b\left[\cancelto{0}{\cos\tfrac{\pi}{2}}\cos\left(\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)-\operatorname{sen}\left(\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)\cancelto{1}{\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y=(a-b)\operatorname{sen}\theta+b\operatorname{sen}\left(\theta\left(1-\tfrac{a}{b}\right)\right)}$$

Si $\frac{a}{b}=2$ $\quad\frac{a}{b}=3$ $\quad\frac{a}{b}=4$ $\quad\frac{a}{b}=5$

Epicicloide



La epicicloide es la curva que describe un punto P de una circunferencia de radio r, que rueda sin resbalar, por fuera, de otra de radio r_0.

Tenemos que $x'=(r_0+r)\cos\theta$ y $y'=(r_0+r)\operatorname{sen}\theta$

$\therefore$ las coordenadas hasta el punto A son $((r_0+r)\cos\theta,(r_0+r)\operatorname{sen}\theta)$

Falta buscar las coordenadas del punto P medidas desde A; como P está sobre el círculo de radio r $\Rightarrow P=(r\cos\beta, r\operatorname{sen}\beta)$

Por otro lado, $\measuredangle OAP-\beta+\theta=\pi$ $\Rightarrow \beta=\measuredangle OAP+\theta-\pi$ y las longitudes de los arcos morado y negro son iguales $\Rightarrow \theta r_0=r\measuredangle OAP$

28/01/2014

$$\Rightarrow \measuredangle OAP = \frac{r_0}{r}\theta \quad \Rightarrow \quad \beta = \theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)-\pi$$

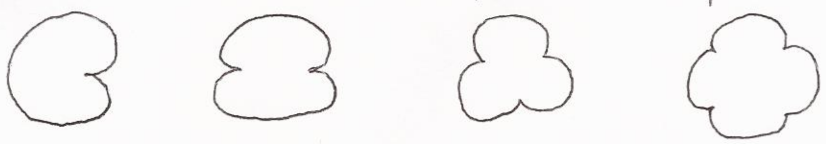
$$\Rightarrow P = (r\cos\beta, r\,\mathrm{sen}\,\beta) = \left(r\cos\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)-\pi\right),\ r\,\mathrm{sen}\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)-\pi\right)\right)$$

$$= \left(r\left[\cos\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right)\overset{-1}{\cancel{\cos\pi}} + \mathrm{sen}\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right)\overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,\pi}}\right],\ r\left[\mathrm{sen}\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right)\overset{-1}{\cancel{\cos\pi}} - \overset{0}{\cancel{\mathrm{sen}\,\pi}}\cos\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right)\right]\right)$$

$$= \left(-r\cos\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right),\ -r\,\mathrm{sen}\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right)\right)$$

$$\therefore \boxed{\begin{aligned} x &= (r_0+r)\cos\theta - r\cos\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right) \\ y &= (r_0+r)\,\mathrm{sen}\,\theta - r\,\mathrm{sen}\left(\theta\left(\frac{r_0}{r}+1\right)\right) \end{aligned}}$$

si $\frac{r_0}{r}=1$ $\quad \frac{r_0}{r}=2$ $\quad \frac{r_0}{r}=3$ $\quad \frac{r_0}{r}=4$



Encontrar qué curvas representan:

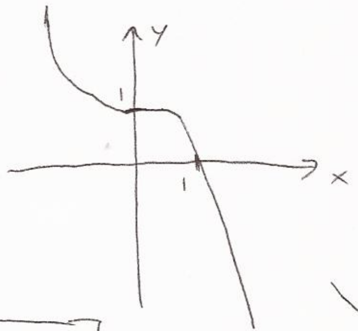
a) $x=\sqrt[3]{t}$, $y=1-t$

b) $x=|t-1|$, $y=t+2$

c) $x=\cos\theta$, $y=2\,\mathrm{sen}\,2\theta$

a) $x=\sqrt[3]{t} \Rightarrow x^3=t$

$\Rightarrow \boxed{y=1-x^3}$

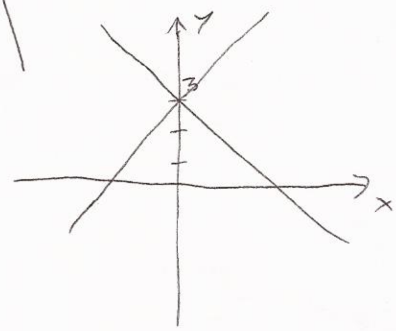


b) $x=t-1 \Rightarrow t=x+1 \Rightarrow y=x+3$

ó

$x=-(t-1) \Rightarrow t=1-x \Rightarrow y=3-x$

$\boxed{\begin{aligned} &y=x+3 \\ &\text{ó} \\ &y=3-x \end{aligned}}$



c) $y = 2\,\mathrm{Sen}\,2\theta \Rightarrow y^2 = 4(\mathrm{Sen}\,2\theta)^2 = 4(2\,\mathrm{Sen}\,\theta\,\mathrm{Cos}\,\theta)^2$

$= 16\,\mathrm{Sen}^2\theta\,\mathrm{Cos}^2\theta = 16\,\mathrm{Cos}^2\theta\,(1-\mathrm{Cos}^2\theta)$

Como $x = \mathrm{Cos}\,\theta \Rightarrow \boxed{y^2 = 16x^2(1-x^2)}$