25/02/2014

Espacios Normados

Def.

Si $x \in \mathbb{R}^n$, definimos la norma euclidiana de x como el real no negativo $\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$, que denotaremos por cualquiera de los símbolos $\|x\|$ ó $N(x)$, i,e $\|x\| = N(x) = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$.

Tenemos así una función $\|\,\|: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que designamos la norma euclideana o euclidea, la cual asigna a cada vector $x \in \mathbb{R}^n$ un real $\|x\|$.

Desigualdad de Cauchy-Shwarz

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |x_1y_1+\dots+x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$

Mostrar la anterior desigualdad es equivalente a demostrar

$|x_1||y_1|+\dots+|x_n||y_n| \leq \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$ pues

$$|x_1y_1+\dots+x_ny_n| \leq |x_1||y_1|+\dots+|x_n||y_n|.$$

Sol.

Tomamos $x, y \neq 0$, pues si alguno de los 2 es cero se cumple la desigualdad trivialmente; hagamos $\alpha = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ y $\beta = \sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2}$

$\Rightarrow$ la desigualdad a probar se escribe

$$|x_1||y_1|+\dots+|x_n||y_n| \leq \alpha\beta$$

y como $\alpha, \beta > 0 \Rightarrow \left|\frac{x_1}{\alpha}\right|\left|\frac{y_1}{\beta}\right|+\dots+\left|\frac{x_n}{\alpha}\right|\left|\frac{y_n}{\beta}\right| \leq 1 \quad \dots ①$

Ahora bien, dado que para cualquiera reales se cumple que

$$|a||b| = |ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x_1}{\alpha}\right|\left|\frac{y_1}{\beta}\right|+\dots+\left|\frac{x_n}{\alpha}\right|\left|\frac{y_n}{\beta}\right| \leq \frac{\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}}{2}+\dots+\frac{\frac{x_n^2}{\alpha^2}+\frac{y_n^2}{\beta^2}}{2} = \frac{\frac{x_1^2+\dots+x_n^2}{\alpha^2}}{2}+\frac{\frac{y_1^2+\dots+y_n^2}{\beta^2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

$\therefore$ ① se cumple

$\therefore$ $\underbrace{|x_1y_1+\dots+x_ny_n| \leq \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\sqrt{y_1^2+\dots+y_n^2} \text{ se cumple}}$

Proposición (norma euclidiana)

Para cualquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \|0\| = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Dem.

1) $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \geq 0$ pues la raíz cuadrada siempre es ≥ 0 $\therefore \|x\| \geq 0$

2) $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x_1)^2 + \ldots + (\alpha x_n)^2} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \ldots + \alpha^2 x_n^2} = \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + \ldots + x_n^2)} = \sqrt{\alpha^2} \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$

$= |\alpha| \|x\|$

3) $\|x+y\|^2 = (x_1 + y_1)^2 + \ldots + (x_n + y_n)^2 = x_1^2 + 2x_1 y_1 + y_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2x_n y_n + y_n^2$

$= x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) + y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \|x\|^2 + 2(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) + \|y\|^2$

Aplicando Cauchy-Shwarz $\quad x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \leq |x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n| \leq \|x\| \|y\|$

$\Rightarrow \|x\|^2 + 2(x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

$\therefore \|x+y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 \qquad \therefore \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

4) Si $\|x\| = 0 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \Rightarrow x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 0$, pero $x_i^2 \geq 0 \ \forall i$

$\Rightarrow$ necesariamente $x_i^2 = 0 \ \forall i \Rightarrow x_i = 0 \quad \therefore x = 0$

Definición

Una norma en $\mathbb{R}^n$ es cualquier función $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades que denominaremos Axiomas de Norma, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ y toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple:

1) $\|x\| \geq 0 \quad \|0\| = 0$
2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

Proposición

Para toda norma $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se cumple:

1) $\|-x\| = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
2) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

25/02/2014

Dem.

1) $\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1|\|x\| = \|x\|$

2) $0 \leq \|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\| \cdots *)$

Ahora, intercambiando $x \Leftrightarrow y$ en $*)$ tenemos

$\|y\| - \|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\| \cdots **)$

Juntando $*)$ y $**)$ se obtiene $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

Otras normas en $\mathbb{R}^n$

Definimos $\| \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$

P.D. $\| \|_1$ es una norma.

1) Dado que $|x_i| \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0 \quad \therefore \|x\|_1 \geq 0$

2) $\|\alpha x\|_1 = |\alpha x_1| + \ldots + |\alpha x_n| = |\alpha||x_1| + \ldots + |\alpha||x_n| = |\alpha|(|x_1| + \ldots + |x_n|) = |\alpha|\|x\|$

3) $\|x+y\|_1 = |x_1+y_1| + \ldots + |x_n+y_n| \leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n|$

$= |x_1| + \ldots + |x_n| + |y_1| + \ldots + |y_n| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

$\therefore \|x+y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

4) Si $\|x\|_1 = 0 \Rightarrow |x_1| + \ldots + |x_n| = 0$, y como $|x_i| \geq 0 \ \forall i$

$\Rightarrow$ necesariamente $|x_i| = 0 \ \forall i$ y esto pasa si $x_i = 0 \ \forall i \quad \therefore x = 0$

$\therefore \| \|_1$ es una norma de $\mathbb{R}^n$

Consideremos ahora la función $\| \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Proposición

La función $\| \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, que se denomina norma del máximo o norma cúbica.

Dem

1) Dado que $|x_i| \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \geq 0 \quad \therefore \|x\|_\infty \geq 0$

2) $\|\alpha x\| = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$

Supongamos que $|x_\gamma| = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$

$\Rightarrow |x_\gamma| \geq |x_i| \quad \forall i \Rightarrow |\alpha||x_\gamma| \geq |\alpha||x_i| \quad \forall i \Rightarrow |\alpha x_\gamma| \geq |\alpha x_i| \quad \forall i$

$\therefore |\alpha||x_\gamma| = |\alpha x_\gamma| = máx\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = máx\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$

$\therefore |\alpha|\, máx\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = máx\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = máx\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$

$\therefore \|\alpha x\|_\infty = |\alpha|\|x\|_\infty$

3) $\|x+y\|_\infty = máx\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\}$

Sea $|x'+y'| = máx\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\}$

Como $|x'+y'| \leq |x'| + |y'| \Rightarrow máx\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\} \leq |x'|+|y'|$

Pero por definición $|x'| \leq máx\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$ y $|y'| \leq máx\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$

$\Rightarrow máx\{|x_1+y_1|, \ldots, |x_n+y_n|\} \leq máx\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + máx\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$

$\therefore \|x+y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

4) Si $\|x\|_\infty = máx\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 0$, dado que $|x_i| \geq 0$ $\forall i$ y el máximo de todos ellos es cero $\Rightarrow$ necesariamente $|x_i| = 0$ $\forall i$ $\Rightarrow x_i = 0$ $\forall i$

$\therefore x = 0$ vector en $\mathbb{R}^n$

$\therefore \| \, \|_\infty$ es una norma en $\mathbb{R}^n$

Ejercicio

Sea $I = [0,1]$. Dem. que $\|f\| = \sup\{|f(x)|\}$ es una norma de $C[0,1]$

1) Como $|f(x)| \geq 0$ $\forall x \in I \Rightarrow \sup\{|f(x)|\} \geq 0$ $\forall x \in I$ $\therefore \|f\| \geq 0$

2) $\|\alpha f\| = \sup\{|\alpha f(x)|\} = \sup\{|\alpha||f(x)|\} = |\alpha| \sup\{|f(x)|\} = |\alpha|\|f\|$

3) $\|f+g\| = \sup\{|f(x)+g(x)|\}$

Sea $x_0 \in I \ni |f(x_0)|$ y $|g(x_0)|$ sean los mayores en I, en consecuencia $|f(x_0)+g(x_0)|$ es el máximo valor posible en I.

$\therefore \sup\{|f(x)+g(x)|\} \leq |f(x_0)+g(x_0)| \leq |f(x_0)| + |g(x_0)| \leq \sup\{|f(x)|\} + \sup\{|g(x)|\}$

$= \|f\| + \|g\|$

$\therefore \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

25/02/2014

4) Si $\|f\| = \sup\{|f(x)|\} = 0$, dado que $|f(x)| \geq 0 \ \forall x \in I$ y el supremo de ellos es cero $\Rightarrow$ necesariamente $|f(x)| = 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in$

$\therefore$ $\|f\| = \sup\{|f(x)|\}$ es una norma

Ejercicio

Dem. que $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ es una norma de $C[0,1]$.

1) Como $|f(x)| \geq 0 \ \forall x \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|dx \geq 0 \ \forall x \in [0,1] \quad \therefore \|f\| \geq 0$

2) $\|\alpha f\| = \int_0^1 |\alpha f(x)|dx = \int_0^1 |\alpha||f(x)|dx = |\alpha| \int_0^1 |f(x)|dx = |\alpha|\|f\|$

3) $\|f+g\| = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)dx = \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx$

$= \|f\| + \|g\|$

$\therefore \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

4) Si $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx = 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$

$\therefore$ $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ es una norma