27/02/2014

Definición

Sea $\| \, \|_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada así:

$$\|x\|_p = \left(\sum_i^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Vamos a demostrar que $\|x\|_p$ es una norma.

Dem.

1) Como $|x_i| \geq 0 \quad \forall_i \Rightarrow |x_i|^p \geq 0 \ \forall_i \Rightarrow \sum_i^n |x_i|^p \geq 0 \Rightarrow \left(\sum_i^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$
$\therefore \|x\|_p \geq 0$

2) $\|\alpha x\|_p = \left(\sum_i^n |\alpha x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_i^n |\alpha|^p |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \sum_i^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \left(\sum_i^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$
$= |\alpha| \|x\|_p$

4) Como $\|x\|_p = \left(\sum_i^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \Rightarrow \sum_i^n |x_i|^p = 0 \quad \Rightarrow |x_i|^p = 0 \quad \forall_i \Rightarrow |x_i| = 0$
$\forall_i$, y esto pasa sólo si $x_i = 0 \ \forall_i \quad \Rightarrow$ el vector $x = 0$.

3) Para demostrar la desigualdad del triángulo tenemos que demostrar 3 cosas:

① Sean $p, q \in \mathbb{R} \ \ni \ p, q > 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, esto lo usaremos para demostrar $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$

Dem.

Consideremos la función $\varphi : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = t^m - mt$ con $m = \frac{1}{p}$.

Se tiene que $\varphi'(t) = mt^{m-1} - m = m(t^{m-1} - 1)$, por lo que $\varphi'(t) = 0$
$\Leftrightarrow m(t^{m-1} - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow t = 1$, $\therefore t = 1$ es un punto crítico de la función, ahora volvemos a derivar $\varphi''(t) = m(m-1)t^{m-2}$ que en $t=1$ es < 0, $\therefore$ en $t=1$ $\varphi(t)$ alcanza un máximo
$\Rightarrow \varphi(t) \leq \varphi(1) \quad \Rightarrow t^m - mt \leq 1 - m \quad \Rightarrow t^m - 1 \leq m(t-1)$; ahora hacemo
$t = \frac{|a|^p}{|b|^q} \qquad \Rightarrow \left(\frac{|a|^p}{|b|^q} \right)^{\frac{1}{p}} - 1 \leq \frac{1}{p} \left(\frac{|a|^p}{|b|^q} - 1 \right)$

multiplicando ambos miembros de la desigualdad por $|b|^q$ $\Rightarrow$

$$|b|^q\left(\left(\frac{|a|^p}{|b|^q}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right)\leq |b|^q\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|a|^p}{|b|^q}-1\right)\right)$$

$$\Rightarrow |b|^q\left(|a||b|^{-\frac{q}{p}}-1\right)\leq |b|^q\left(\frac{1}{p}\left(\frac{|a|^p}{|b|^q}-1\right)\right)$$

$\Rightarrow |a||b|^{q-\frac{q}{p}}-|b|^q \leq \frac{|a|^p}{p}-\frac{|b|^q}{p}$, por otro lado, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{q}{p}+1=q$

$\Rightarrow q-\frac{q}{p}=1 \Rightarrow |a||b|\leq \frac{|a|^p}{p}-\frac{|b|^q}{p}+|b|^q$, ahora $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{|b|^q}{p}+\frac{|b|^q}{q}=|b|^q$

$\Rightarrow \frac{|b|^q}{q}=|b|^q-\frac{|b|^q}{p}$

$$\therefore |a||b|\leq \frac{|a|^p}{p}+\frac{|b|^q}{q}$$

② Ahora probaremos la desigualdad de Holder.

$$\sum_{K}^{n}|a_Kb_K|\leq \left[\sum_{K}^{n}|a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{K}^{n}|b_K|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Dem.

Sea $A=\left(\sum_{K}^{n}|a_K|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ y $B=\left(\sum_{K}^{n}|b_K|^q\right)^{\frac{1}{q}}$, def. $a'_K=\frac{a_K}{A}$ y $b'_K=\frac{b_K}{B}$

$\Rightarrow$ usando la desigualdad de la parte ① se tiene

$$|a'_Kb'_K|\leq \frac{|a'_K|^p}{p}+\frac{|b'_K|^q}{q} \Rightarrow \sum_{K}^{n}|a'_Kb'_K|\leq \sum_{K}^{n}\frac{|a'_K|^p}{p}+\sum_{K}^{n}\frac{|b'_K|^q}{q}=\frac{1}{p}\sum_{K}^{n}|a'_K|^p+\frac{1}{q}\sum_{K}^{n}|b'_K|$$

$$=\frac{1}{p}\sum_{K}^{n}\left|\frac{a_K}{A}\right|^p+\frac{1}{q}\sum_{K}^{n}\left|\frac{b_K}{B}\right|^q=\frac{1}{p}\frac{1}{A^p}\sum_{K}^{n}|a_K|^p+\frac{1}{q}\frac{1}{B^q}\sum_{K}^{n}|b_K|^q \;\ldots *)$$

Ahora, como $A^p=\left(\left(\sum_{K}^{n}|a_K|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)^p=\sum_{K}^{n}|a_K|^p$ y $B^q=\left(\left(\sum_{K}^{n}|b_K|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q=\sum_{K}^{n}|b_K|^q$

$$\Rightarrow *)=\frac{1}{p}\frac{1}{\cancel{\sum_{K}^{n}|a_K|^p}}\cancel{\sum_{K}^{n}|a_K|^p}+\frac{1}{q}\frac{1}{\cancel{\sum_{K}^{n}|b_K|^q}}\cancel{\sum_{K}^{n}|b_K|^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$\therefore \sum_{K}^{n}|a'_Kb'_K|\leq 1 \Rightarrow \sum_{K}^{n}\left|\frac{a_K}{A}\frac{b_K}{B}\right|\leq 1 \Rightarrow \sum_{K}^{n}|a_Kb_K|\leq AB$$

$$\Rightarrow \sum_{K}^{n}|a_Kb_K|\leq \left[\sum_{K}^{n}|a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_{K}^{n}|b_K|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

27/02/2014

③ Para finalizar, probaremos la desigualdad de Minkowski:

$$\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_K^n |a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_K^n |b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Dem.

$$\sum_K^n |a_K+b_K|^p = \sum_K^n |a_K+b_K|^{p-1}|a_K+b_K| \leq \sum_K^n |a_K+b_K|^{p-1}(|a_K|+|b_K|)$$

$$= \sum_K^n |a_K+b_K|^{p-1}|a_K| + \sum_K^n |a_K+b_K|^{p-1}|b_K|$$

Aplicando la desigualdad de Holder a cada sumando tenemos que

$$\sum_K^n |a_K+b_K|^{p-1}|a_K| \leq \left[\sum_K^n |a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_K^n |a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

y $\displaystyle\sum_K^n |a_K+b_K|^{p-1}|b_K| \leq \left[\sum_K^n |b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^{q(p-1)}\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum_K^n |b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right]^{\frac{1}{q}}$

pues $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Rightarrow \frac{q+p}{pq}=1 \Rightarrow q+p=pq \Rightarrow p=q(p-1)$

$$\therefore \sum_K^n |a_K+b_K|^p \leq \left[\sum_K^n |a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_K^n |b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}\left[\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right]^{\frac{1}{q}}$$

Dividiendo ambos lados de la desigualdad por $\left(\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$\Rightarrow \left(\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left[\sum_K^n |a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_K^n |b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}}$ y como $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$

$$\Rightarrow \left[\sum_K^n |a_K+b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_K^n |a_K|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_K^n |b_K|^p\right]^{\frac{1}{p}} \blacktriangle$$

Pero la última desigualdad es precisamente la desigualdad del triángulo de la norma p.

$$\therefore \|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

$\therefore \| \,\|_p$ es una norma

Métricas

Ejercicio

Sea d una métrica de un conjunto no vacío X. Dem. que la función e definida por $e(a,b)=\min(1, d(a,b))$ donde $a,b\in X$ también es una métrica de X.

Sol.

1) Sean $a,b\in X$; puesto que d es una métrica $d(a,b)\geq 0 \Rightarrow e(a,b)=1$ ó $e(a,b)=d(a,b)\geq 0$, en cualquier caso $e(a,b)\geq 0$.

2) P.D. $e(a,b)=e(b,a)$

Supongamos que $e(a,b)=1 \Rightarrow d(a,b)>1 \Rightarrow d(b,a)>1 \Rightarrow e(b,a)=1$ por ser el mínimo $\therefore e(a,b)=1=e(b,a)$.

Ahora, si $e(a,b)=d(a,b)$ sabemos que $d(a,b)=d(b,a)<1$ (pues es el mínimo) $\Rightarrow e(a,b)=d(a,b)=d(b,a)=e(b,a)$

$\therefore$ en ambos casos $e(a,b)=e(b,a)$.

3) P.D. $e(a,b)\leq e(a,c)+e(b,c)$

Obsérvese que $e(a,b)=\min\{1,d(a,b)\}\leq 1$ de donde $e(a,c)=1$ y/o $e(b,c)=$

$\therefore e(a,b)\leq e(a,c)+e(b,c)$

Pero también puede ocurrir que $e(a,c)<1$ y $e(b,c)<1$

$\therefore e(a,c)=d(a,c)$ y $e(b,c)=d(b,c)$

$\therefore e(a,b)=\min\{1,d(a,b)\}\leq d(a,b)\leq d(a,c)+d(b,c)=e(a,c)+e(b,c)$.

$\therefore e(a,b)\leq e(a,c)+e(b,c)$

4) Si $e(a,b)=0 \Rightarrow d(a,b)=0 \Rightarrow a=b$

$\therefore e(a,b)=\min\{1,d(a,b)\}$ es una métrica en X.

Ejercicio

Sea $d(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|dx$. ¿Es d una métrica?

Sol.

No, ya que si $f(x)=0$ $\forall x$ y $g(x)=\begin{cases} 0 & 0\leq x<1 \\ 1 & x=1\end{cases} \Rightarrow |f(x)-g(x)|=0$, pero $f\neq g$, $\therefore$ no cumple con $d(a,b)=0 \Rightarrow a=b$, $\therefore d(f,g)$ no es una métrica.