04/03/2014

Def.

Sea $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $\bar{x}$ es punto frontera de $A\subset\mathbb{R}^n$ si $\forall r>0$ $B(\bar{x},r)\cap A\neq\phi$ y $B(\bar{x},r)\cap A^c\neq\phi$.

Def. (Frontera de A)

$Fr\,A=\partial A=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n \mid \bar{x}$ es punto prontera de $A\}$

Def.

Un elemento $\bar{a}\in\mathbb{R}^n$ se dice que es un punto adherente de A si toda bola abierta con centro $\bar{a}$ tiene puntos de A, i,e, si $\forall r>0$ $B(\bar{a},r)\cap A\neq\phi$.

Al conjunto de puntos adherentes de A se le denomina adherenci (o cerradura de A), y se le denota $\bar{A}$, A^-, adh A.

Donde $\bar{A}=\mathring{A}\cup\partial A$ con $\mathring{A}\cap\partial A=\phi$

Def.

Sea $A\subset\mathbb{R}^n$. Se dice que $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A, si toda bola abierta con centro en $\bar{x}$ contiene un punto de A distinto de $\bar{x}$, i,e, si $\forall r>0$ se tiene $(B(\bar{x},r)-\{\bar{x}\})\cap A\neq\phi$.

Al conjunto de puntos de acumulación de A se le denomina conjunto derivado de A y se le denota por A^a, A'.

Def.

Un conjunto $A\subset\mathbb{R}^n$ es cerrado si contiene todos sus puntos frontera.

Proposición 1

Sea $A\subset\mathbb{R}^n \Rightarrow$ i) $\mathring{A}\subset A$ ii) $A\subset\bar{A}$

Dem

i) sea $\bar{x}\in\mathring{A}\Rightarrow\bar{x}$ es punto interior de $A\Rightarrow\exists r>0 \ni B(\bar{x},r)\subset A\Rightarrow\bar{x}\in A$

$\therefore\mathring{A}\subset A$

ii) Sea $\bar{x}\in A\Rightarrow\forall r>0$ $B(\bar{x},r)\cap A\neq\phi\Rightarrow\bar{x}$ es punto adherente de $A\Rightarrow\bar{x}\in\bar{A}$

$\therefore A\subset\bar{A}$

Proposición 2

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con $A \subset B \Rightarrow$ i) $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ ii) $\bar{A} \subset \bar{B}$

Dem.

i) Sea $\bar{x} \in \mathring{A} \Rightarrow \exists r>0 \ \dagger \ B(\bar{x},r) \subset A$, pero como $A \subset B \Rightarrow B(\bar{x},r) \subset B$ $\Rightarrow \bar{x} \in \mathring{B}$, $\therefore \mathring{A} \subset \mathring{B}$

ii) Sea $\bar{x} \in \bar{A}$, $\Rightarrow \bar{x}$ es punto adherente de $A \Rightarrow \forall r>0 \ B(\bar{x},r) \cap A \neq \phi$, como $A \subset B \Rightarrow B(\bar{x},r) \cap B \neq \phi \Rightarrow \bar{x}$ es punto adherente de $B \Rightarrow \bar{x} \in \bar{B}$ $\therefore \bar{A} \subset \bar{B}$

Lema

Sea $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ i) Si $V \subset A$, V abierto $\Rightarrow V \subset \mathring{A}$

ii) Si $A \subset F \subset \mathbb{R}^n$, F cerrado $\Rightarrow \bar{A} \subset F$

Dem.

i) Sea $\bar{x} \in V$, como V es abierto $\Rightarrow \bar{x}$ es punto interior de $V \Rightarrow \exists r>0$ $\dagger \ B(\bar{x},r) \subset V$, como $V \subset A \Rightarrow B(\bar{x},r) \subset A$, así $\bar{x}$ es punto interior de A $\therefore V \subset \mathring{A}$

ii) Demostrar que $\bar{A} \subset F$ implica que $F^c \subset \bar{A}^c$. Sea $\bar{x} \in F^c$, como F es cerrado $\Rightarrow F^c$ es abierto, luego $\bar{x}$ es punto interior de $F^c \Rightarrow \exists r>0 \ \dagger \ B(\bar{x},r) \subset F^c$, por otro lado, como $A \subset F \Rightarrow F^c \subset A^c$ lo que implica que $B(\bar{x},r) \subset A^c$, así $B(\bar{x},r) \cap A = \phi$, lo que significa que $\bar{x}$ no es punto adherente de A, i,e, $\bar{x} \in \bar{A} \Rightarrow \bar{x} \in \bar{A}^c$

$\therefore F^c \subset \bar{A}^c$, $\therefore \bar{A} \subset F$

Proposición 3

Sea $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ i) $\mathring{A}$ es abierto ii) $\bar{A}$ es cerrado

Dem.

i) Sea $\bar{x} \in \mathring{A} \Rightarrow \bar{x}$ es punto interior de $A \Rightarrow \exists r>0 \ \dagger \ B(\bar{x},r) \subset A$, pero obsérvese que el último paso es precisamente la definición de conjunto abierto, $\therefore \mathring{A}$ es abierto.

ii) P.D. $\bar{A}$ es cerrado

P.D. $\bar{A}^c$ es abierto.

Sea $\bar{x} \in \bar{A}^c \Rightarrow \bar{x} \notin \bar{A} \Rightarrow \bar{x}$ no es punto adherente de $A \Rightarrow \exists r>0$ $\dagger \ B(\bar{x},r) \cap \bar{A} = \phi \Rightarrow B(\bar{x},r) \not\subset \bar{A} \Rightarrow B(\bar{x},r) \subset \bar{A}^c$ $\therefore \bar{A}^c$ es abierto

04/03/2014

$\therefore \bar{A}$ es cerrado.

Proposición 4

Sea $A \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow$ i) A es abierto $\Leftrightarrow \mathring{A} = A$

ii) A es cerrado $\Leftrightarrow \bar{A} = A$

Dem.

i) $\Rightarrow]$ Sea A abierto, sabemos de la proposición 1 parte i) que $\mathring{A} \subset A$, por otra parte, del lema parte i) tenemos que $A \subset A$ y A abierto $\Rightarrow A \subset \mathring{A} \Rightarrow \mathring{A} = A$.

$\Leftarrow]$ Se sigue de la proposición 3 parte i), pues $\mathring{A}$ es abierto y $\mathring{A} = A$ $\Rightarrow A$ es abierto.

ii) $\Rightarrow]$ Sea A cerrado, sabemos de la proposición 1 parte ii) que $A \subset \bar{A}$, por otra parte, del lema parte ii) tenemos que $A \subset A$ y A cerrado $\Rightarrow \bar{A} \subset A \Rightarrow \bar{A} = A$.

$\Leftarrow]$ Se sigue de la proposición 3 parte ii), pues $\bar{A}$ es cerrado y $\bar{A} = A$ $\Rightarrow A$ es cerrado.