06/03/2014

Proposición

Si A y B son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n \Rightarrow A \cup B$ es abierto.

Dem.

P.D. $A \cup B$ es abierto.

Sea $\bar{x} \in A \cup B \Rightarrow \bar{x} \in A$ o $\bar{x} \in B$.

Si $\bar{x} \in A \Rightarrow$ como A es abierto $\exists r > 0 \ni B(\bar{x}, r) \subset A \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset A \cup B$.

Si $\bar{x} \in B \Rightarrow$ como B es abierto $\exists r' > 0 \ni B(\bar{x}, r') \subset B \Rightarrow B(\bar{x}, r') \subset A \cup B$

$\therefore A \cup B$ es abierto.

Proposición

Si A y B son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n \Rightarrow A \cap B$ es abierto.

Dem.

Sea $\bar{x} \in A \cap B \Rightarrow \bar{x} \in A$ y $\bar{x} \in B$.

Como A es abierto $\Rightarrow \exists r' > 0 \ni B(\bar{x}, r') \subset A$, de igual manera, como B es abierto $\Rightarrow \exists r'' > 0 \ni B(\bar{x}, r'') \subset B$.

Sea $r = \min\{r', r''\} \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset B(\bar{x}, r')$ y $B(\bar{x}, r) \subset B(\bar{x}, r'') \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset A$ y $B(\bar{x}, r) \subset B \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset A \cap B$. $\therefore A \cap B$ es abierto.

Proposición

Si A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n \Rightarrow A \cup B$ es cerrado.

Dem.

Dado que A y B son cerrados $\Rightarrow A^c$ y B^c son abiertos.

$\Rightarrow (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ y sabemos que la intersección de 2 conjuntos abiertos es un conjunto abierto $\Rightarrow (A \cup B)^c$ es abierto, $\therefore A \cup B$ es cerrado.

Proposición

Si A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n \Rightarrow A \cap B$ es cerrado.

Dem.

Dado que A y B son cerrados $\Rightarrow A^c$ y B^c son abiertos.

$\Rightarrow (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ y sabemos que la unión de 2 conjuntos abiertos es un conjunto abierto $\Rightarrow (A \cap B)^c$ es abierto, $\therefore A \cap B$ es cerrado.

- $\mathbb{R}^n$ es abierto, pues dado cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ está contenida en $\mathbb{R}^n$.

- El ϕ es abierto.

Dem.

Suponemos que el ϕ no es abierto, $\therefore \exists \bar{x} \in \phi$ para el cual no es posible hallar una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en el ϕ. Pero esto no es posible, ya que el ϕ no tiene elementos, $\Rightarrow$ el supone que el ϕ no es abierto es una ! $\therefore$ el ϕ es abierto.

- $\mathbb{R}^n$ es cerrado.

En efecto, pues su complemento (el ϕ) es abierto.

- ϕ es cerrado.

En efecto, pues su complemento ($\mathbb{R}^n$) es abierto.

$\therefore$ $\mathbb{R}^n$ y el ϕ son los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez.

* Sean C y D subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Estúdiese si se verifica en gral.

1) $\overline{C \cap D} = \bar{C} \cap \bar{D}$

2) $Int(C \cup D) = Int(C) \cup Int(D)$

Sol.

1) Falso.

Sean $C = (0,1)$ y $D = (1,2)$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. $\Rightarrow C \cap D = \phi$ y $\bar{\phi} = \phi$, mientras que $\bar{C} = [0,1]$ y $\bar{D} = [1,2] \Rightarrow \bar{C} \cap \bar{D} = \{1\}$

$\therefore \phi \neq \{1\}$.

2) Falso.

Sean $C = [0,1]$ y $D = [1,2]$ subconjuntos de $\mathbb{R} \Rightarrow C \cup D = [0,2]$ y $Int([0,2]) = (0,2)$, mientras que $Int(C) = (0,1)$ y $Int(D) = (1,2)$

$\Rightarrow \mathring{C} \cup \mathring{D} = (0,1) \cup (1,2)$

$\therefore (0,2) \neq (0,1) \cup (1,2)$.