11/03/2014

Ejercicio

Póngase un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un subconjunto propio que cumpla las siguientes propiedades:

a) Que no sea abierto ni cerrado.

b) Que sea abierto y cerrado.

c) Que sea acotado y no compacto.

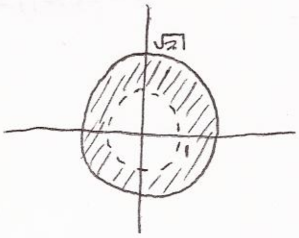
d) Que sea cerrado y no compacto.

e) Que sea abierto y no acotado.

f) Que sea compacto y abierto.

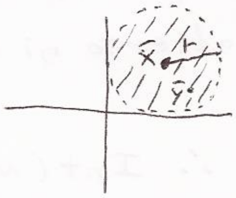
Sol.

a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1<x^2+y^2\leq 2\}$



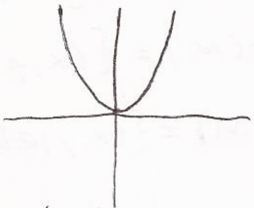
b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<0\}=\phi$

c) $A=B(\bar{x},r)=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^2 \mid \|\bar{y}-\bar{x}\|<r\}$

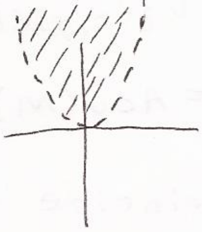


La bola abierta es acotada pero no compact

d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x^2\}$



La parábola es cerrada, pero no acotada $\therefore$ no compacta.



e) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>x^2\}$

f) $\nexists$ ya que en $\mathbb{R}^n$ todo conjunto compacto es cerrado y acotado.

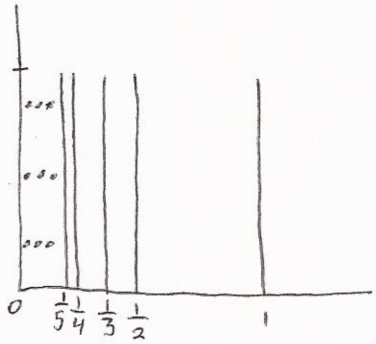
Ejercicio

Determinar el interior, exterior, frontera, adherencia y acumulación de los siguientes conjuntos:

a) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}, 0\leq y\leq 1\}$

b) $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|\geq 1, x+y\leq 1\}$

Sol.

a) 

$\therefore$ $Int(M)=\mathring{M}=\emptyset$

$Adh(M)=\overline{M}=M\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y\in[0,1]\}$

$Fr(M)=\partial M=Acu(M)=M^a=Adh(M)=\overline{M}$

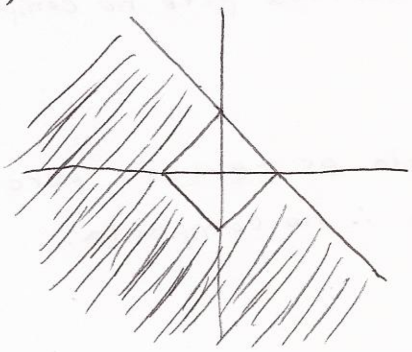
$Ext(M)=M^c=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq 0 \text{ y } \frac{1}{x}\notin\mathbb{N}\}$

$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x}\in\mathbb{N}, y\notin[0,1]\}$

$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=0, y\notin[0,1]\}$

El conjunto M no es abierto, ya que no coincide con su interior, y no es cerrado, ya que no coincide con su adherencia.

$\therefore$ M no es abierto ni cerrado.

b) 

$\therefore$ $Int(M)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|>1, x+y<1\}$

$Ext(M)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y>1\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|<1\}$

$Fr(M)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x|+|y|=1, x+y<1\}$

$\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$

$Adh(M)=Acu(M)=M$

M no es abierto, ya que no coincide con su interior.

M es cerrado, ya que coincide con su adherencia.

11/03/2014

Ejercicio

Sean $C, D \subset \mathbb{R}^n$. Estúdiese si se verifica en general.

a) $Adh(C \cup D) = Adh(C) \cup Adh(D)$

b) $Adh(Adh(C)) = Adh(C)$

c) $Int(Int(C)) = Int(C)$

d) $Int(C \cap D) = Int(C) \cap Int(D)$

Sol.

a) Verdadera.

Sea $\bar{x} \in \overline{C \cup D} \Leftrightarrow \bar{x}$ es punto adherente de $C \cup D \Leftrightarrow \forall r > 0$ la $B(\bar{x}, r) \cap (C \cup D) \neq \emptyset \Leftrightarrow B(\bar{x}, r) \cap C \neq \emptyset$ o $B(\bar{x}, r) \cap D \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{x}$ es punto adherente de C o de $D \Leftrightarrow \bar{x} \in \bar{C}$ o $\bar{x} \in \bar{D} \Leftrightarrow \bar{x} \in \bar{C} \cup \bar{D}$.

$\therefore Adh(C \cup D) = Adh(C) \cup Adh(D)$ ▲

b) Verdadera.

Sabemos que $Adh(C)$ es cerrado, y por otro lado sabemos que si un conjunto es cerrado $\Rightarrow$ la adherencia del conjunto coincide con el conjunto, i,e $Adh(Adh(C)) = Adh(C)$ ▲

c) Verdadera.

Sabemos que $Int(C)$ es abierto, y por otro lado sabemos que si un conjunto es abierto $\Rightarrow$ el interior del conjunto coincide con el conjunto, i,e $Int(Int(C)) = Int(C)$ ▲

d) Verdadera.

P.D. $Int(C \cap D) \subset Int(C) \cap Int(D)$

Sea $\bar{x} \in Int(C \cap D) \Rightarrow \bar{x}$ es punto interior de $C \cap D \Rightarrow \exists r > 0 \ni B(\bar{x}, r) \subset (C \cap D) \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset C$ y $B(\bar{x}, r) \subset D \Rightarrow \bar{x}$ es punto interior de C y $\bar{x}$ es punto interior de $D \Rightarrow \bar{x} \in \mathring{C}$ y $\bar{x} \in \mathring{D} \Rightarrow \bar{x} \in \mathring{C} \cap \mathring{D}$

$\therefore Int(C \cap D) \subset Int(C) \cap Int(D)$

P.D. $Int(C) \cap Int(D) \subset Int(C \cap D)$

Sea $\bar{x} \in \mathring{C} \cap \mathring{D} \Rightarrow \bar{x} \in \mathring{C}$ y $\bar{x} \in \mathring{D} \Rightarrow \bar{x}$ es punto interior de C y $\bar{x}$ es punto interior de D $\Rightarrow \exists r_1, r_2 > 0 \ \ni B(\bar{x}, r_1) \subset C$ y $B(\bar{x}, r_2) \subset D$. Sea $r = \min\{r_1, r_2\} \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset B(\bar{x}, r_1)$ y $B(\bar{x}, r) \subset B(\bar{x}, r_2) \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset C$ y $B(\bar{x}, r) \subset D \Rightarrow B(\bar{x}, r) \subset (C \cap D)$ $\Rightarrow \bar{x}$ es punto interior de $C \cap D \Rightarrow \bar{x} \in Int(C \cap D)$

$\therefore Int(C) \cap Int(D) \subset Int(C \cap D)$

$\therefore Int(C \cap D) = Int(C) \cap Int(D)$ ▲