13/03/2014

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, se define el diámetro de A como:

$D = \sup\{d(\bar{x},\bar{y}) \mid \bar{x},\bar{y} \in A\}$

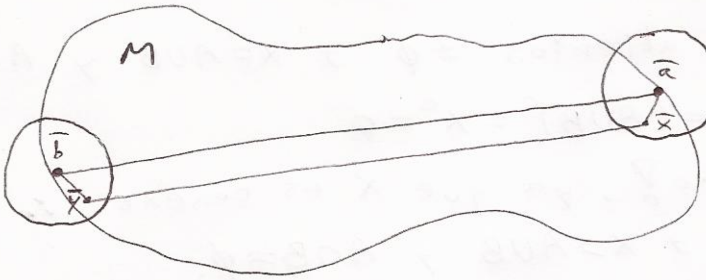
Ejercicio

Sea M un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$. Demuéstrese que $\overline{M}$ es compacto.

Sol.

Puesto que la adherencia de un conjunto siempre es cerrado $\Rightarrow$ basta con demostrar que $\overline{M}$ es acotado.

Por ser M acotado, tiene diámetro D finito. Si $\bar{a},\bar{b} \in \overline{M} \Rightarrow \exists\, \bar{x},\bar{y}$ de $M \ni \bar{x} \in B(\bar{a},1)$ y $\bar{y} \in B(\bar{b},1)$.



$\Rightarrow d(\bar{a},\bar{b}) \leq d(\bar{a},\bar{x}) + d(\bar{x},\bar{b}) \leq d(\bar{a},\bar{x}) + d(\bar{x},\bar{y}) + d(\bar{y},\bar{b}) \leq 1 + D + 1$

$\therefore\ d(\bar{a},\bar{b}) \leq D+2$ para cualesquiera $\bar{a},\bar{b} \in \overline{M}$ $\therefore\ \overline{M}$ es acotado.

$\therefore\ \overline{M} = Adh(M)$ es compacto.

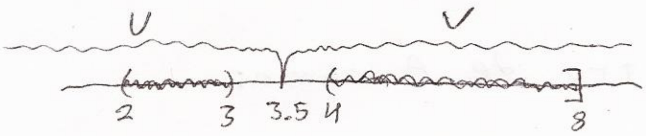
Proposición

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. A es no conexo $\Leftrightarrow \exists\, U, V$ abiertos en $\mathbb{R}^n \ni U \neq \emptyset \neq V$, $A \subset U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset \neq A \cap V$ y $A \cap (U \cap V) = \emptyset$.

Ejercicio

Sea $A = (2,3) \cup (4,8]$ en $\mathbb{R}$. Demostrar que A es no conexo.

Sea $U=(-\infty,3.5)$ y $V=(3.5,\infty)$



Claramente $U,V\neq\phi$ y $A\subset U\cup V$

$A\cap U=(2,3)\neq\phi$, $A\cap V=(4,8]\neq\phi$

$A\cap(U\cap V)=A\cap\phi=\phi$

$\therefore$ como $\exists\, U,V\subset\mathbb{R}$ abiertos que cumplen con todo lo anterior

$\Rightarrow$ A no es conexo $\blacktriangle$

1) Si X es conexo $\Rightarrow\nexists$ subconjuntos abiertos $A,B\neq\phi\ \ni$ $X=A\cup B$ y $A\cap B=\phi$

Dem.

Supongamos que $\exists\, A,B$ abiertos $\neq\phi\ \ni X=A\cup B$ y $A\cap B=\phi$

$\Rightarrow X=A^c\cup B^c$ y $A^c\cap B^c=(A\cup B)^c=X^c=\phi$

$\therefore$ X sería no conexo ∇, ya que X es conexo $\therefore$ Si X es conexo $\Rightarrow\nexists\, A,B\neq\phi$ abiertos $\ni X=A\cup B$ y $A\cap B=\phi$.

2) Si X es conexo $\Rightarrow\nexists$ subconjuntos cerrados $A,B\neq\phi\ \ni$ $X=A\cup B$ y $A\cap B=\phi$

Dem.

Supongamos que $\exists\, A,B$ cerrados $\neq\phi\ \ni X=A\cup B$ y $A\cap B=\phi$

$\Rightarrow X=A^c\cup B^c$ y $A^c\cap B^c=\phi$, pero A^c y B^c son abiertos ∇, pues ya se demostró en 1) que $\nexists$ abiertos $A^c,B^c\neq\phi\ \ni X=A^c\cup B^c$ y $A^c\cap B^c=$

$\therefore$ Si X es conexo $\Rightarrow\nexists\, A,B\neq\phi$ cerrados $\ni X=A\cup B$ y $A\cap B=\phi$.

3) Sean A y B conjuntos conexos que no están separados $\Rightarrow A\cup B$ es conexo.

Dem.

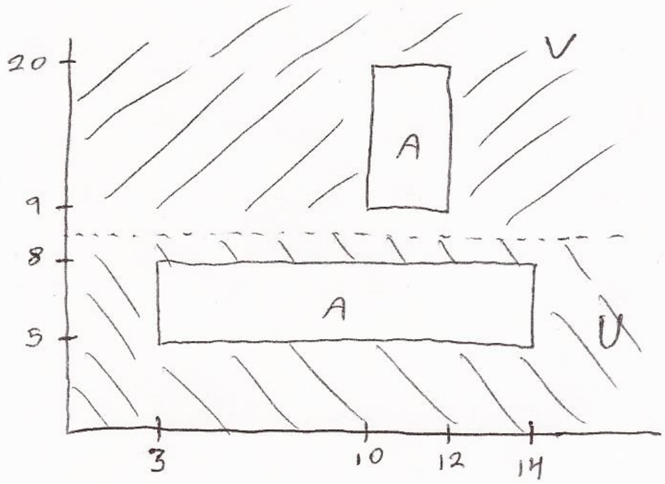
Sea $X=A\cup B$ y supongamos que X es no conexo $\Rightarrow\exists\, S,T\neq\phi$ $\ni X=S\cup T$ y $S\cap T=\phi$ $\therefore$ $A\subset S$ o $A\subset T$, si $A\subset S\Rightarrow B\subset S$, 13/03/2014

pues en caso contrario A y B estarían separados

$\therefore A \cup B \subset S$ y $T = \emptyset$! ya que $S, T \neq \emptyset \Rightarrow X = A \cup B$ es conexo ▲

Ejercicio

Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, con $A = ([3,14] \times [5,8]) \cup ([10,12] \times [9,20])$. Demostrar que A no es conexo.



Sean $U = \mathbb{R} \times (-\infty, 8.5)$ y $V = \mathbb{R} \times (8.5, \infty)$ abiertos en $\mathbb{R}^2$ $\neq \emptyset$

Claramente $A \subset U \cup V = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{8.5\})$

$A \cap U = [3,14] \times [5,8] \neq \emptyset$ y $A \cap V = [10,12] \times [9,20] \neq \emptyset$

$A \cap (U \cap V) = A \cap \emptyset = \emptyset$

$\therefore$ como $\exists\, U, V \neq \emptyset$ abiertos $\ni$ que cumplen con lo anterior

$\Rightarrow A$ es no conexo ▲