18/03/2014

Ejercicio

Calcular y demostrar los límites de las siguientes sucesiones en $\mathbb{R}^2$.

a) $\bar{x}_n = \left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$

b) $\bar{x}_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right)$

c) $\bar{x}_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2}{n^2}\right)$

Sol.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n}\right) = (1,0)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ + \ \left\|\left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n}\right) - (1,0)\right\| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$\Rightarrow \left\|\left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n}\right) - (1,0)\right\| = \left\|\left(\frac{n+1}{n+2} - 1, \frac{1}{n}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{n+1}{n+2} - 1\right)^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{n^2}}$

$< \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} < n$ $\therefore$ basta tomar $N_0 = \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon}$

para que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}, \frac{1}{n}\right) = (1,0) \quad \forall n > N_0$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) = (0,0)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ + \ \left\|\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) - (0,0)\right\| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$\Rightarrow \left\|\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{4n^2} + \frac{9}{4n^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{10}}{2\varepsilon} < n$ $\therefore$ basta tomar $N_0 = \frac{\sqrt{10}}{2\varepsilon}$

para que $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}\right) = (0,0) \quad \forall n > N_0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \bar{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2}{n^2}\right) = (1,0)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ + \ \left\|\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2}{n^2}\right) - (1,0)\right\| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$\Rightarrow \left\|\left(\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1, \frac{2}{n^2}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{n^2-1}{n^2+1} - 1\right)^2 + \frac{4}{n^4}} = \sqrt{\frac{4}{(n^2+1)^2} + \frac{4}{n^4}} < \sqrt{\frac{4}{n^4} + \frac{4}{n^4}} \quad \ldots (1)$

① $\begin{cases} < \sqrt{\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} < n & \therefore \text{ basta tomar } N_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon} \\ = \frac{2\sqrt{2}}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}} < n & \therefore \text{ basta tomar } N_0 = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\varepsilon}} \end{cases}$

El 1er. N_0 difiere del segundo ya que se acotó 2 veces para llegar a un resultado más simple (con n lineal), y el segundo se acotó sólo una vez llegando a un resultado con n cuadrático; así que cualquiera puede ser útil dependiendo de cómo se acote.

$\therefore \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{2}{n^2}\right) = (1,0) \quad \forall n > N_0.$

Ejercicio

Demostrar que $[0,1] \subset \mathbb{R}$ es compacto y dar una sucesión convergente a cero.

P.D. $[0,1]$ es compacto.

P.D. $[0,1]$ es cerrado y acotado

Dem.

P.D. $(-\infty,0)\cup(1,\infty)$ es abierto

Sea $x_1 \in (-\infty,0)$ y sea $r_1 = |x_1| \Rightarrow B(x_1,r_1) \subset (-\infty,0)$

En efecto, sea $y_1 \in B(x_1,r_1) \Rightarrow$ por definición $|x_1-y_1|<r_1$

$\Rightarrow -r_1 < x_1-y_1 < r_1 \Rightarrow -r_1 < y_1-x_1 < r_1 \Rightarrow x_1-r_1 < y_1 < x_1+r_1$

Como $r_1 = |x_1| = -x_1$ pues $x_1 \in (-\infty,0) \Rightarrow y_1 < x_1+r_1 = x_1-x_1 = 0 \quad \therefore y_1<0$

$\therefore (-\infty,0)$ es abierto.

Ahora, sea $x_2 \in (1,\infty)$ y sea $r_2 = |x_2-1| \Rightarrow B(x_2,r_2) \subset (1,\infty)$

En efecto, sea $y_2 \in B(x_2,r_2) \Rightarrow$ por definición $|x_2-y_2|<r_2$

$\Rightarrow -r_2 < x_2-y_2 < r_2 \Rightarrow -r_2 < y_2-x_2 < r_2 \Rightarrow x_2-r_2 < y_2 < x_2+r_2$

Como $r_2 = |x_2-1| = x_2-1$ pues $x_2 \in (1,\infty) \Rightarrow x_2-r_2 = x_2-x_2+1 = 1 < y_2$

$\therefore 1<y_2 \quad \therefore (1,\infty)$ es abierto.

Como $(-\infty,0)$ y $(1,\infty)$ son abiertos $\Rightarrow (-\infty,0)\cup(1,\infty)$ es abierto.

$\therefore [0,1]$ es cerrado.

18/03/2014

P.D. $[0,1]$ es acotado.

En efecto es acotado, sea $r = \min\{|x|, |x-1|\}$ y sea $R = r + n'$ $n' > 1$

$\Rightarrow [0,1] \subset B(x, R) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$\therefore$ $[0,1]$ es compacto.

Ahora bien, sea $x_n = \frac{1}{n}$ $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow x_n \to 0$, i,e $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \in \mathbb{N} \ \ni \ |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \quad \forall n > N_0$

$|\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \underset{\text{pues } n \in \mathbb{N}}{\frac{1}{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ $\therefore$ basta tomar $N_0 = \frac{1}{\varepsilon}$

para que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \forall n > N_0$.