20/03/2014

- Un punto es convexo?

Verdadero.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ con $A = \{\bar{x}\}$

Sean $\bar{x}, y \in \mathbb{R}^n \ni \bar{x} = \bar{y}$

$\Rightarrow (1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} = (1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{x} = \bar{x} \subset A = \{\bar{x}\}$ $\therefore \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es convexo.

- El ϕ es convexo?

Verdadero.

Supongamos que el ϕ no es convexo, $\Rightarrow \exists \bar{x}, \bar{y} \in \phi \ni (1-\lambda)\bar{x} + \lambda\bar{y} \notin \phi$ con $\lambda \in [0,1]$. Pero esto no es posible, ya que el ϕ no tiene elementos, $\therefore$ el suponer que ϕ no es convexo es una $!$, $\therefore$ el ϕ es convexo.

- A convexo, B convexo $\Rightarrow$ $A \cup B$ convexo?

Falso.

Sea $A = [0,1]$ y $B = [2,3]$ convexos $\Rightarrow A \cup B = [0,1] \cup [2,3]$

Sea $x = \frac{1}{2}$ y sea $y = \frac{5}{2}$ $\Rightarrow x, y \in A \cup B$ $\Rightarrow \forall \lambda \in [0,1]$

$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\lambda = \frac{1}{2} + 2\lambda \notin A \cup B$ ya que para $\lambda \in (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ la recta no pertenece a la unión.

$\therefore$ A convexo, B convexo $\Rightarrow$ no necesariamente $A \cup B$ es convexo.

- A convexo, B convexo $\Rightarrow$ $A \cap B$ convexo?

Verdadero.

Como A es convexo $\Rightarrow \forall \bar{x}_1, \bar{y}_1 \in A$ $(1-\lambda)\bar{x}_1 + \lambda\bar{y}_1 \subset A$ $\lambda \in [0,1]$

Como B es convexo $\Rightarrow \forall \bar{x}_2, \bar{y}_2 \in B$ $(1-\lambda)\bar{x}_2 + \lambda\bar{y}_2 \subset B$ $\lambda \in [0,1]$

P.D. $A \cap B$ es convexo.

Sean $\bar{x}_3, \bar{y}_3 \in A \cap B$ $\Rightarrow \bar{x}_3, \bar{y}_3 \in A$ y $\bar{x}_3, \bar{y}_3 \in B$

$\Rightarrow (1-\lambda)\bar{x}_3 + \lambda\bar{y}_3 \subset A$ y $(1-\lambda)\bar{x}_3 + \lambda\bar{y}_3 \subset B$ $\lambda \in [0,1]$

$\Rightarrow (1-\lambda)\bar{x}_3 + \lambda\bar{y}_3 \subset A\cap B \qquad \lambda\in[0,1]$

$\therefore$ $A\cap B$ es convexo.

Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Una función $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función cuyo dominio es un subconjunto $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, denotada por $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$ donde a cada $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ f le asigna un vector $f(x)\in\mathbb{R}^m$.

Ejemplo: La función $f(x,y)=x^2+y^2$ asocia a la pareja $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ el número real x^2+y^2. El $\operatorname{Dom} f=\mathbb{R}^2$

Ejemplo: La función $f(x,y,z)=\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ asocia a la terna $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ el número real $\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ y

$\operatorname{Dom} f=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 1-x^2-y^2-z^2\geq 0\}=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 1\}$

Ejemplo: La función $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)$ asocia a la terna $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ el vector $(x^2+y^2+z^2,\ x+y+z)\in\mathbb{R}^2$, donde f tiene por dominio todo $\mathbb{R}^3$, pero su imagen contiene sólo los vectores $\mathbb{R}^2$ cuya primera coordenada es no negativa.