25/03/2014

Límites de funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ejercicio

- Límite por trayectorias.

a) Calcular el límite de $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^2}$ en $(0,0)$

Bajo $y=x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{(x^2+x^4)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{(1+x^2)^2}=0$$

Bajo $y=x^2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^{12}}{(x^2+x^8)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^8}{(1+x^6)^2}=0$$

$\therefore$ asumimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^2}=0$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0 \ / \ \|(x,y)-(0,0)\|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \left|\frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^2}\right|\leq\left|\frac{x^4y^4}{x^4}\right|=|y^4|=|y|^4<\delta^4=\varepsilon$$

$$x^2\leq x^2+y^4$$
$$\Rightarrow x^4\leq(x^2+y^4)^2 \Rightarrow \frac{1}{(x^2+y^4)^2}\leq\frac{1}{x^4}$$

$\therefore$ basta con tomar $\delta=\varepsilon^{1/4}$ para asegurar que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

b) Calcular el límite de $f(x,y)=y\,\mathrm{Sen}(x+y)$ en $(0,0)$

Bajo $y=x$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x)=\lim_{x\to 0} x\,\mathrm{Sen}(2x)=0$$

Bajo $y=x^2$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x,x^2)=\lim_{x\to 0} x^2\,\mathrm{Sen}(x+x^2)=0$$

$\therefore$ asumimos que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\mathrm{Sen}(x+y)=0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \dagger \ \|(x,y)-(0,0)\| < \delta \Rightarrow |y\,\text{sen}(x+y) - 0| < \varepsilon$

$\Rightarrow |y\,\text{sen}(x+y)| \leq |y| < \delta = \varepsilon$ $\therefore$ basta con tomar $\delta = \varepsilon$ para asegurar que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

-Límite por sucesiones.

a) Calcula el límite por sucesiones de $f(x,y) = xy$ en $(0,0)$

Sea $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right)$ ya que $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (0,0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \dagger \ \left|\frac{1}{n(n-1)} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n > N_0.$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{n(n-1)}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ $\therefore$ basta con tomar $N_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ para asegurar que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 0.$

b) Calcula el límite por sucesiones de $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{1-x} & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ en $(-1,1)$

*) Por límites iterados

$\lim\limits_{x\to -1}\left(\lim\limits_{y\to 1} \frac{x+y}{1-x}\right) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{1-x} = 0$

$\lim\limits_{y\to 1}\left(\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+y}{1-x}\right) = \lim\limits_{y\to 1} \frac{y-1}{2} = 0$

*) Por trayectorias.

Bajo $y = -x$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x,-x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{0}{1-x} = 0$

Bajo $y = x^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to -1} f(x,x^2) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x+x^2}{1-x} = 0$

$\therefore$ asumimos que $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x+y}{1-x} = 0$

25/03/2014

Ahora, sea $(x_n, y_n) = \left(\frac{1-n}{1+n}, 1-\frac{1}{n}\right)$ ya que $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (-1,1)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-n}{1+n} + \frac{n-1}{n}}{1-\left(\frac{1-n}{1+n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-\cancel{n^2}+\cancel{n^2}-1}{n(n+1)}}{\frac{\cancel{1}+n-(\cancel{1}-n)}{1+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{n(\cancel{n+1})}}{\frac{2n}{\cancel{1+n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2} = 0$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 \ \ni \left|\frac{n-1}{2n^2} - 0\right| < \varepsilon \ \forall n > N_0.$

$\Rightarrow \left|\frac{n-1}{2n^2}\right| < \left|1-\frac{1}{n}\right| \leq 1+\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon-1} < n$, Ahora bien, si tomamos $N_0 = \frac{1}{\varepsilon-1}$ el límite se cumple, pero entonces ya no sería $\forall\varepsilon$ pues ε debe ser $\neq 1$, $\therefore$ no nos conviene acotar de esa manera.

$n < n^2 < 2n^2$

$\Rightarrow \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{n-1}{2n^2} < \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \left|\frac{n-1}{2n^2}\right| < \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n$ $\therefore$ basta con tomar $N_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ para asegurar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{2n^2} = 0.$$

como $n < 2n$

$\Rightarrow \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$

pues $\frac{1}{2n^2} > 0$

- Límites por cambio a polares, cilíndricas o esféricas.

a) Polares $\quad x = r\cos\theta$
$\quad y = r\operatorname{sen}\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{r^2}} = \operatorname{sen}^2\theta$$ como $0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow \lim \to \nexists$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r^2}(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)} = \frac{1}{\cos 2\theta} = \sec 2\theta$$

como $\theta \in \left([0, 2\pi] - \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}\right) \Rightarrow \lim \to \nexists$

b) Cilíndricas $\quad x = r\cos\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta,\ z = z$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{(r,z)\to(0,0)} \frac{r^2}{r^2+z^2}$$

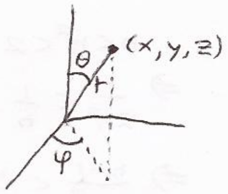
*) Por iterados

$$\lim_{r\to 0}\left(\lim_{z\to 0} \frac{r^2}{r^2+z^2}\right) = \lim_{r\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{z\to 0}\left(\lim_{r\to 0} \frac{r^2}{r^2+z^2}\right) = \lim_{z\to 0} 0 = 0$$

$\therefore$ como los iterados $\exists$'n y son $\neq \Rightarrow \lim \to \nexists$

Esféricas $\quad x = r\cos\varphi\,\text{sen}\,\theta,\ y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi,\ z = r\cos\theta$



$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\cancel{r^2}\,\text{sen}^2\varphi}{\cancel{r^2}} = \text{sen}^2\varphi$$

como $\varphi \in [0, 2\pi] \quad \Rightarrow \lim \to \nexists$.