27/03/2014

1) Si $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y A conexo $\Rightarrow f(A)$ es conexo.

Dem.

Como A es conexo $\Rightarrow \nexists\, S, T \neq \phi$ abiertos $\ni$ $S \cap T = \phi$ y $A \subset S \cup T$

Suponemos que $f(A)$ es no conexo. $\Rightarrow \exists\, S', T' \neq \phi \ni S' \cap T' = \phi$ y $f(A) \subset S' \cup T'$ $\Rightarrow f^{-1}(S')$ y $f^{-1}(T')$ son abiertos $\ni$ $f^{-1}(S') \cap f^{-1}(T') = \phi$ y $A \subset f^{-1}(S') \cup f^{-1}(T')$ ∇

pues como A es conexo $\nexists$ 2 abiertos $\neq \phi$ $\ni S \cap T = \phi$ y $A \subset S \cup T$

$\therefore f(A)$ es conexo$\blacktriangle$

2) Sea $(E, d_E), (F, d_F)$ dos espacios métricos, $f: E \to F$ es continua en $E \Leftrightarrow \forall A \subset E$ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ (conservación de la adherencia).

Dem.

$\Rightarrow]$ Sea $\bar{x} \in A$, por un lado sabemos que $A \subset \bar{A} \Rightarrow \bar{x} \in \bar{A} \Rightarrow \bar{x}$ es pto. adherente de A, al ser f continua en E si $\bar{x} \in \bar{A} \Rightarrow f(\bar{x}) \in f(\bar{A})$ y si $\bar{x}$ es pto. adherente de A $\Rightarrow f(\bar{x})$ es pto. adherente de $f(A)$ $\Rightarrow \forall r > 0$ $B(f(\bar{x}), r) \cap f(A) \neq \phi$ $\Rightarrow f(\bar{x}) \in \overline{f(A)}$, ahora, como $f(\bar{x}) \in f(\bar{A})$ y $f(\bar{x}) \in \overline{f(A)}$ $\therefore f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

$\Leftarrow]$ Como $\forall A \subset E$ $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, sea $f(\bar{x}) \in f(\bar{A})$ que por definición $f(\bar{A}) = \{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in \bar{A}\}$ y debido a la contención $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) \in \overline{f(A)}$, $\therefore$ como $\bar{x}$ es pto. adherente de A y $f(\bar{x})$ es pto. adherente de $f(A)$ al mismo tiempo, para $\bar{x}$ arbitrario $\Rightarrow$ f es continua en E.

3) Sea $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \dots, f_m(\bar{x}))$ $\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ y sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ un pto. de acumulación.

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0) \Leftrightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_i(\bar{x}) = f_i(\bar{x}_0) \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Dem.

$\Rightarrow]$ Como f es continua en $\bar{x}_0$ $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists \delta>0 \; \ni$ si $\|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\delta$

$\Rightarrow \|f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)\|<\varepsilon$ y dado que

$$0 \leq |f_i(\bar{x})-f_i(\bar{x}_0)| \leq \|f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)\| < \varepsilon \quad \forall i=1,\dots,m$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq |f_i(\bar{x})-f_i(\bar{x}_0)| < \varepsilon \quad \forall i=1,\dots,m$$

i,e, $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_i(\bar{x})=f_i(\bar{x}_0)$ $\forall i=1,\dots,m$ siempre que $\|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\delta$.

$\Leftarrow]$ Como $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f_i(\bar{x})=f_i(\bar{x}_0)$ $\forall i=1,\dots,m$ $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \; \exists\delta>0 \; \ni \|\bar{x}-\bar{x}_0\|<\delta$

$$\Rightarrow |f_i(\bar{x})-f_i(\bar{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{m} \quad \forall i=1,\dots,m.$$

$$\therefore \; 0 \leq \|f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)\| \leq |f_1(\bar{x})-f_1(\bar{x}_0)|+\dots+|f_m(\bar{x})-f_m(\bar{x}_0)|$$

$$< \underbrace{\frac{\varepsilon}{m}+\dots+\frac{\varepsilon}{m}}_{m\text{-veces}} = \varepsilon$$

$\therefore \|f(\bar{x})-f(\bar{x}_0)\|<\varepsilon$ $\quad\therefore \lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})=f(\bar{x}_0)$ $\blacktriangle$

4) Si f y g son funciones continuas en $\bar{x}_0$.

$\Rightarrow$ *) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})+g(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)+g(\bar{x}_0)$

**) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x})g(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)g(\bar{x}_0)$

***) $\lim\limits_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \dfrac{f(\bar{x})}{g(\bar{x})} = \dfrac{f(\bar{x}_0)}{g(\bar{x}_0)}$ con $g(\bar{x})\neq\bar{0}$ y $g(\bar{x}_0)\neq\bar{0}$