06/02/2014

Ejercicio

Hallar el ángulo formado por las gráficas de las funciones definidas como $f(t)=(t, t^2+1, 1-2t)$ y $g(w)=(w+\frac{1}{2}, 8w-2, -2w)$ en alguno de los puntos de intersección.

Sol.

El ángulo formado por 2 curvas en un punto de intersección es el formado por sus tangentes en el mismo punto. Primero igualemos las funciones componente a componente:

1) $t=w+\frac{1}{2}$, 2) $t^2+1=8w-2$, 3) $1-2t=-2w$

Sustituyendo 1) en 2) $\Rightarrow$

$(w+\frac{1}{2})^2+1=8w-2 \Rightarrow w^2-7w+\frac{13}{4}=0 \Rightarrow w_1=\frac{1}{2}$ y $w_2=\frac{13}{2}$

Sustituyendo estos valores en 1) obtenemos que $t_1=1$ ó $t_2=7$ de manera que los puntos de intersección son $P_1=(1,2,-1)$ y $P_2=(7,50,-13)$; tomando a P_1 tenemos que $f'(t)=(1,2t,-2)$ y $g'(w)=(1,8,-2)$, $\therefore f'(1)=(1,2,-2)$ y $g'(\frac{1}{2})=(1,8,-2)$, de modo que ángulo entre f' y g' es calculado a partir de

$f'(1)\cdot g'(\frac{1}{2})=\|f'(1)\|\|g'(\frac{1}{2})\|\cos\theta$

$$\Rightarrow \theta=\arccos\left(\frac{f'(1)\cdot g'(\frac{1}{2})}{\|f'(1)\|\|g'(\frac{1}{2})\|}\right)=\arccos\left(\frac{21}{3\sqrt{69}}\right)\approx 32°6'$$

Ejercicio

Dem. que si $f(t)$ es derivable en $t_0 \Rightarrow f(t)$ es continua en t_0.

Sol.

$$\lim_{t\to t_0}(f(t)-f(t_0))=\lim_{t\to t_0}(f(t)-f(t_0))\left(\frac{t-t_0}{t-t_0}\right)=\lim_{t\to t_0}\left(\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)(t-t_0)$$

$$=\left(\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}\right)\left(\lim_{t-t_0}(t-t_0)\right)=f'(t_0)\left(\lim_{t\to t_0}(t-t_0)\right)=f'(t_0)(\cancelto{0}{t_0-t_0})$$

$=0$. $\therefore f(t)$ es continua en t_0.

Ejercicio

Mostrar que la derivada de un vector de magnitud cte. es ortogonal a él.

Sol.

Sea $r(t)$ un vector de magnitud cte, i,e,

$$r(t)\cdot r(t) = \|r(t)\|^2 = K \quad \text{con } K \text{ cte.}$$

$$\Rightarrow \frac{d\|r(t)\|^2}{dt} = \frac{d(r(t)\cdot r(t))}{dt} = r'(t)\cdot r(t) + r(t)\cdot r'(t) = \frac{dK}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow 2r(t)\cdot r'(t) = 0 \quad \Rightarrow r(t)\cdot r'(t) = 0 \quad \therefore r(t) \perp r'(t)$$

Ejemplo

El vector $r(t) = 3\cos t\,\hat{i} + 3\operatorname{Sen} t\,\hat{j} + t^2\hat{k}$ da la posición de un cuerpo en movimiento en tiempo t. Encontrar la rapidez de cuerpo y su dirección en el tiempo $t=2$. En que tiempo son ortogonales los vectores velocidad y aceleración del cuerpo?

Sol.

Tenemos que $r'(t) = (-3\operatorname{Sen} t, 3\cos t, 2t)$ $\therefore$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{9\operatorname{Sen}^2 t + 9\cos^2 t + 4t^2} = \sqrt{9(\operatorname{Sen}^2 t + \cos^2 t) + 4t^2} = \sqrt{9+4t^2}$$

y en $t=2$ $\quad \|r'(2)\| = \sqrt{9+4(2)^2} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ la rapidez es 5 y la dirección es $\frac{1}{5}(-3\operatorname{Sen} 2, 3\cos 2, 4)$

Por otro lado:

$$v(t)\cdot a(t) = 0 \Leftrightarrow (-3\operatorname{Sen} t, 3\cos t, 2t)\cdot(-3\cos t, -3\operatorname{Sen} t, 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{9\operatorname{Sen} t\cos t} - \cancel{9\operatorname{Sen} t\cos t} + 4t = 0$$

$$\therefore 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \quad \therefore \text{sólo en } t=0 \;\; v(t) \perp a(t)$$

Ejemplo

Sea $r'(t)=\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \sqrt{1+\operatorname{Senh}^2 t}\right)$ el vector velocidad de una partícula al tiempo t, calcular:

a) rapidez en $t=0$

b) aceleración en $t=0$

c) posición en $t=1$

a) $$\|r'(0)\| = \sqrt{\frac{t^2}{1-t^2}+\frac{1}{1-t^2}+1+\operatorname{Senh}^2 t}\,\Bigg|_{t=0} = \sqrt{2}$$

b) $a(t)=r''(t)$

Para la 1era. componente

$$\left(\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = \frac{\sqrt{1-t^2}-t\left(\frac{1}{2}\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{1-t^2} = \frac{\sqrt{1-t^2}+\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2} = \frac{\frac{1-t^2+t^2}{\sqrt{1-t^2}}}{1-t^2}$$

$$= \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$$

Para la segunda componente

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)' = \left((1-t^2)^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{-2t}{(1-t^2)^{3/2}} = \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}$$

y para la 3era. recordemos que $\cosh^2 t - \operatorname{Senh}^2 t = 1$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1+\operatorname{Senh}^2 t}\right)' = \left(\sqrt{\cosh^2 t}\right)' = (\cosh t)' = \operatorname{Senh} t$$

$$\therefore\ a(t) = \left(\frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}, \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}}, \operatorname{Senh} t\right) \quad \text{y en } t=0$$

$$a(0) = (1, 0, 0)$$

c) $r(t) = \int r'(t)\,dt$

Para la 1era. componente

$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{2}\frac{u^{1/2}}{\frac{1}{2}} = -u^{1/2} = -\sqrt{1-t^2}+c_1$$

$u = 1-t^2$

$du = -2t\,dt \quad \Rightarrow -\frac{du}{2} = t\,dt$

Para la 2nda. componente

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}} = \int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\cos\theta} = \int d\theta = \theta \qquad \therefore\ \theta = \arcsin t$$

$t = \operatorname{Sen}\theta$
$dt = \cos\theta\, d\theta$

Para la 3era. componente.

$$\int \sqrt{1+\operatorname{Senh}^2 t}\, dt = \int \sqrt{\cosh^2 t}\, dt = \int \cosh t\, dt = \operatorname{Senh} t + C_3$$

$\therefore\ r(t) = (-\sqrt{1-t^2},\ \arcsin t,\ \operatorname{Senh} t) + C \qquad$ con $C = (C_1, C_2, C_3)$

y en $t = 1$

$r(1) = (0, \frac{\pi}{2}, \operatorname{Senh}(1)) + C$

Ejemplo

Calcular la longitud de arco de $F(t) = (\ln(\sec t), t, \pi)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$\Rightarrow F'(t) = (\tan t, 1, 0)$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \|F'(t)\|\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan^2 t + 1}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\sec^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t\, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec t \left(\frac{\sec t + \tan t}{\sec t + \tan t}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 t + \sec t \tan t}{\sec t + \tan t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{du}{u}$$

$u = \sec t + \tan t$
$du = (\sec t \tan t + \sec^2 t)\, dt$

$$= \ln(\sec t + \tan t)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(\sqrt{2}+1) - \ln(1-0) = \ln(\sqrt{2}+1) - \cancel{\ln(1)}^{0}$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} \|F'(t)\|\, dt = \ln(\sqrt{2}+1)$$