03/04/2014

1) Calcula las derivadas direccionales de las siguientes funciones en la dirección del vector dado.

a) $D_{(1,1)}f(x,y)$ con $f(x,y) = xy$

$$D_{(1,1)}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(1,1)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t,y+t) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(x+t)(y+t) - xy}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{xy} + x\cancel{t} + y\cancel{t} + t^{\cancel{2}} - \cancel{xy}}{\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} x+y+t = \underline{x+y}$$

b) $D_{(1,2)}f(x,y)$ con $f(x,y) = \frac{y}{x}$

$$D_{(1,2)}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(1,2)) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y+2t) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{y+2t}{x+t} - \frac{y}{x}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cancel{xy} + 2xt - \cancel{xy} - yt}{x(x+t)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2x\cancel{t} - y\cancel{t}}{x(x+t)\cancel{t}}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2x-y}{x(x+t)} = \frac{2x-y}{x^2} = \underline{\frac{2}{x} - \frac{y}{x^2}}$$

c) $D_{(\pi,\frac{\pi}{2})}f(x,y)$ con $f(x,y) = y\operatorname{Sen}x$

$$D_{(\pi,\frac{\pi}{2})}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f((x,y)+t(\pi,\frac{\pi}{2})) - f(x,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+\pi t, y+\frac{\pi}{2}t) - f(x,y)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(y+\frac{\pi}{2}t)\operatorname{Sen}(x+\pi t) - y\operatorname{Sen}x}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{y(\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}\pi t + \operatorname{Sen}\pi t\operatorname{Cos}x) + \frac{\pi}{2}t(\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}\pi t + \operatorname{Sen}\pi t\operatorname{Cos}x) - y\operatorname{Sen}x}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\Big(\underbrace{\frac{y\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}\pi t}{t}}_{\infty} + \underbrace{\frac{\pi\operatorname{Sen}\pi t\operatorname{Cos}x}{\pi t}}_{\pi\operatorname{Cos}x} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\operatorname{Sen}x\operatorname{Cos}\pi t}_{\frac{\pi}{2}\operatorname{Sen}x} + \underbrace{\frac{\pi}{2}\operatorname{Sen}\pi t\operatorname{Cos}x}_{0} - \underbrace{\frac{y\operatorname{Sen}x}{t}}_{-\infty} \Big)$$

Como en el límite hay términos que divergen $\Rightarrow$

$D_{(\pi,\frac{\pi}{2})}\, y\,\mathrm{sen}\, x \rightarrow \nexists$

Teorema

Si la función $f: U\subset\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}$ definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el pto. $p=(x_0,y_0)\in U$, $\Rightarrow$ es continua en ese punto.

Dem.

Como f es diferenciable en $p=(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$

$$f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) = f(x_0,y_0)+A_1h_1+A_2h_2+r(h_1,h_2)$$

Tomando el límite cuando $(h_1,h_2)\rightarrow(0,0)$ y observando que de la condición establecida en la definición para el residuo $r(h_1,h_2)$, se deduce que

$$\lim_{(h_1,h_2)\rightarrow(0,0)} r(h_1,h_2)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{(h_1,h_2)\rightarrow(0,0)} f((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) = \lim_{(h_1,h_2)\rightarrow(0,0)} (f(x_0,y_0)+A_1\cancel{h_1}^{\,0}+A_2\cancel{h_2}^{\,0}+r(\cancel{h_1},h_2)^{\,0}) = f(x_0,y_0)$$

lo cual significa precisamente que la función f es continua en (x_0,y_0) ▲.

Ejemplo

$$\text{Sea } f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Ésta función no puede ser diferenciable en el origen, pues aunque A_1 y A_2 existen en ese pto. $(A_1=A_2=0)$, ésta es discontinua en el mismo, i,e:

$$A_1=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\lim_{t\rightarrow0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\rightarrow0}\frac{\frac{t(0)}{t^2+0^2}-0}{t}=0$$

$$A_2=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\lim_{t\rightarrow0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\rightarrow0}\frac{\frac{(0)t}{0^2+t^2}-0}{t}=0$$

03/04/2014

$\Rightarrow f((0,0)+(h_1,h_2)) = f(0,0)+(0)h_1+(0)h_2+r(h_1,h_2) = r(h_1,h_2)$

$r(h_1,h_2) = \dfrac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \dfrac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$ y cuando $(h_1,h_2)\to(0,0)$

$$\Rightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} \underset{h_1=h_2}{=} \lim_{h_1\to 0}\frac{h_1^2}{(2h_1^2)^{3/2}} = \lim_{h_1\to 0}\frac{1}{2^{3/2}h_1} \to \infty \quad \therefore \nexists$$

Como $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} \to \nexists \Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$.

Ejemplo

verificar si $f(x,y)=xy^2$ es diferenciable en $(0,0)$.

$$\Rightarrow f((0,0)+(h_1,h_2)) = f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}h_1+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}h_2+r(h_1,h_2)$$

donde $f(0,0)=(0)(0)^2=0$, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = y^2\big|_{y=0} = (0)^2=0$, $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 2xy\big|_{(0,0)} = 2(0)(0)=0$

y $r(h_1,h_2)=h_1h_2^2$, $\therefore$ basta con mostrar que $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$

$$\Rightarrow \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \underset{\substack{h_1=\rho\cos\theta\\ h_2=\rho\operatorname{sen}\theta}}{=} \lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^3\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0}\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}^2\theta = 0$$

// Este límite sí es igual a cero, y basta con tomar $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ para que se cumpla. //

Ejemplo

$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ no es diferenciable en $(0,0)$, pues las parciales $\nexists$'n, como a continuación se muestra:

$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t} = \pm 1$, pues $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{t}{t}=1$

y $\displaystyle\lim_{t\to 0^-}\frac{-t}{t}=-1$, caso análogo para $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$, $\therefore$ no es diferenciable en el origen.

Teorema

Sean $f, g: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones definidas en el conjunto abierto U, diferenciables en $\vec{p} \in U$. $\Rightarrow$

a) $(f+g)(\bar{p}) = f(\bar{p}) + g(\bar{p})$ es diferenciable en $\bar{p}$.

b) $(fg)(\bar{p}) = f(\bar{p})g(\bar{p})$ es diferenciable en $\bar{p}$.

c) Si $g(\bar{p}) \neq 0$, $\left(\frac{f}{g}\right)(\bar{p}) = \frac{f(\bar{p})}{g(\bar{p})}$ es diferenciable en $\bar{p}$.

Dem.

La demostración de los 3 incisos es similar, por lo cual sólo se demostrará b) para el caso $n=2$, con $\bar{p} = (x_0, y_0)$.

P.D. que el residuo $r(h_1, h_2)$ definido por la expresión

$$(fg)((x_0,y_0)+(h_1,h_2)) = (fg)(x_0,y_0) + \frac{\partial}{\partial x}(fg)(x_0,y_0)h_1 + \frac{\partial}{\partial y}(fg)(x_0,y_0)h_2 + r(h_1,h_2)$$

tiene la propiedad

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$

$\Rightarrow$ veamos que $\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y}$

y escribiendo $\bar{p} = (x_0, y_0)$, $\bar{h} = (h_1, h_2)$

$$\Rightarrow (fg)(\bar{p}+\bar{h}) = (fg)(\bar{p}) + \left(f(\bar{p})\frac{\partial g}{\partial x}(\bar{p}) + g(\bar{p})\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{p})\right)h_1 + \left(f(\bar{p})\frac{\partial g}{\partial y}(\bar{p}) + g(\bar{p})\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{p})\right)h_2 + r(\bar{h})$$

expresión que podemos escribir como:

$$\begin{aligned} r(\bar{h}) = {} & g(\bar{p}+\bar{h})\left(f(\bar{p}+\bar{h}) - f(\bar{p}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{p})h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{p})h_2\right) \\ & + f(\bar{p})\left(g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p}) - \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{p})h_1 - \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{p})h_2\right) \\ & + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{p})\left(g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p})\right)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{p})\left(g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p})\right)h_2 \end{aligned}$$

de donde se sigue:

03/04/2014

$$\frac{r(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = g(\bar{p}+\bar{h})\,\frac{f(\bar{p}+\bar{h}) - f(\bar{p}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{p})h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{p})h_2}{\|\bar{h}\|}$$

$$+ f(\bar{p})\,\frac{g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p}) - \frac{\partial g}{\partial x}(\bar{p})h_1 - \frac{\partial g}{\partial y}(\bar{p})h_2}{\|\bar{h}\|}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{p})\left(g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p})\right)\frac{h_1}{\|\bar{h}\|} + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{p})\left(g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p})\right)\frac{h_2}{\|\bar{h}\|}$$

Al tomar el límite cuando $\bar{h} \to \bar{0}$ vemos que los 2 primeros sumandos tienden a cero, pues f y g son diferenciables en $\bar{p}$ (los segundos factores de cada uno de estos sumandos definen los residuos –divididos por $\|\bar{h}\|$– de las funciones f y g respectivamente). Por otra parte, como

$$\frac{|h_1|}{\|\bar{h}\|} \leq 1 \quad \text{y} \quad \frac{|h_2|}{\|\bar{h}\|} \leq 1$$

$\forall (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ no nulo (se mantienen acotadas cerca del origen), y como g es diferenciable en $\bar{p}$, $\Rightarrow$ es continua en $\bar{p}$ $\Rightarrow$

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \left(g(\bar{p}+\bar{h}) - g(\bar{p})\right) = 0$$

por lo cual también los dos últimos sumandos tienden a cero cuando $\bar{h} \to \bar{0}$.

$$\therefore \lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{r(\bar{h})}{\|\bar{h}\|} = 0 \quad \blacktriangle$$