10/04/2014

Teorema del valor medio (en función de ∂_x, ∂_y)

$$h\,\partial_x f(x_0+\theta h,\, y_0+\theta k) + k\,\partial_y f(x_0+\theta h,\, y_0+\theta k) = f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

Encontrar θ para $f(x,y) = \operatorname{Sen}\pi(x+y)$, $\bar{p} = (x_0, y_0) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $h = \frac{1}{8}$, $k = \frac{1}{4}$

Sol.

$$\frac{1}{8}\partial_x f\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{8}, \frac{1}{4}+\frac{\theta}{4}\right) + \frac{1}{4}\partial_y f\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{8}, \frac{1}{4}+\frac{\theta}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{8}\operatorname{Cos}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\theta}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\operatorname{Cos}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{\theta}{8}+\frac{1}{4}+\frac{\theta}{4}\right) = \operatorname{Sen}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) - \operatorname{Sen}\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{8}\operatorname{Cos}\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{3\theta}{8}\right) = \operatorname{Sen}\frac{7\pi}{8} - \operatorname{Sen}\frac{\pi}{2} = \operatorname{Sen}\frac{7\pi}{8} - 1 \qquad \text{sea } \alpha = \operatorname{Sen}\frac{7\pi}{8} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{8}\left(\cancel{\operatorname{Cos}\frac{\pi}{2}}^{\,0}\operatorname{Cos}\frac{3\pi\theta}{8} - \cancel{\operatorname{Sen}\frac{\pi}{2}}^{\,1}\operatorname{Sen}\frac{3\pi\theta}{2}\right) = \alpha$$

$$\Rightarrow -\frac{3\pi}{8}\operatorname{Sen}\frac{3\pi\theta}{8} = \alpha \qquad \Rightarrow \theta = \frac{8}{3\pi}\operatorname{arcSen}\left(\frac{-8\alpha}{3\pi}\right) = 0.468$$

el cual efectivamente pertenece a $(0,1)$.

Una función crece más rápido en la dirección del ∇.

a) $f(x,y,z) = x^x y^y z^z$ en $(1,1,1) = \bar{p}$

b) $f(x,y,z) = x^{y^z} + 1$ en $(e,e,e) = \bar{p}$

c) $f(x,y,z) = \operatorname{arcCos} x^2yz + \operatorname{arcSen} xy^2z$ en $(1,1,0) = \bar{p}$

Sol.

a) $\nabla f|_{\bar{p}} = \left(x^x(\ln x + 1),\, y^y(\ln y + 1),\, z^z(\ln z + 1)\right)\Big|_{\bar{p}} = (1,1,1)$

$\therefore$ la función $x^x y^y z^z$ en $\bar{p}$ crece más rápido en la dirección $(1,1,1)$.

b) $\nabla f|_{\bar{p}} = \left(y^z x^{y^z-1},\, z y^{z-1} x^{y^z}\ln x,\, y^z x^{y^z}\ln x \ln y\right)\Big|_{\bar{p}} = \left(e^e e^{e^e-1},\, e e^{e-1} e^{e^e},\, e^e e^{e^e}\right)$

$= \left(e^{e^e+e-1},\, e^{e^e+e},\, e^{e^e+e}\right)$ la cual es la dirección en la que $x^{y^z}+1$ en $\bar{p}$ crece más rápido.

c) $\nabla f\Big|_{\bar{p}} = \left(\frac{-2xyz}{\sqrt{1-x^4y^2z^2}} + \frac{y^2z}{\sqrt{1-x^2y^4z^2}}, \frac{-x^2z}{\sqrt{1-x^4y^2z^2}} + \frac{2xyz}{\sqrt{1-x^2y^4z^2}}, \frac{-x^2y}{\sqrt{1-x^4y^2z^2}} + \frac{xy^2}{\sqrt{1-x^2y^4z^2}} \right)$

$= (0,0,0)$

$\therefore$ la función $\arccos x^2yz + \arcsin xy^2z$ en $\bar{p}$ crece más rápido en la dirección $(0,0,0)$

Puntos críticos

a) $f(x,y) = e^{1+x^2-y^2}$

b) $f(x,y) = e^x \cos y$

c) $f(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$

Sol.

a) $\nabla f = (2xe^{1+x^2-y^2}, -2ye^{1+x^2-y^2}) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{matrix} 2xe^{1+x^2-y^2} = 0 \\ -2ye^{1+x^2-y^2} = 0 \end{matrix}$ como $e^{1+x^2-y^2} > 0 \Rightarrow \begin{matrix} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{matrix}$

$\therefore$ f tiene un pto. crítico en $(x,y) = (0,0)$

b) $\nabla f = (e^x \cos y, -e^x \operatorname{sen} y) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{matrix} e^x \cos y = 0 \\ -e^x \operatorname{sen} y = 0 \end{matrix}$ como $e^x > 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \cos y = 0 \\ -\operatorname{sen} y = 0 \end{matrix}\right\} *$

$\therefore$ f no tiene ptos. críticos, ya que $\nexists$ y t $*$ se cumplan al mismo tiempo.

c) $\nabla f = (2ax + by, bx + 2cy) = (0,0)$

$\Rightarrow \begin{matrix} 2ax + by = 0 \\ bx + 2cy = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} b(2ax+by=0) \\ -2a(bx+2cy=0) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a\cancel{b}x + b^2y = 0 \\ -2\cancel{a}bx - 4acy = 0 \\ \hline (b^2-4ac)y = 0 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ si $b^2 - 4ac \neq 0 \Rightarrow y = 0 \therefore x = 0$

$\therefore$ f tiene un pto. crítico en $(x,y) = (0,0)$ si $b^2 \neq 4ac$

10/04/2014

Plano tangente

El vector normal que necesitamos para describir al plano tangente en $\bar{p}$ debe ser perpendicular al plano tangente en la superficie S, en particular, debe ser perpendicular a cualquier recta tangente a la superficie S en $\bar{p}$.
Obtengamos dos vectores (en los planos xz, yz) que marquen las direcciones de las rectas tangentes ala superficie S en $\bar{p}$ (i,e, que sean paralelas a tales rectas).
Observemos el plano $y=y_0$, éste corta a la superficie S y da lugar a una curva (en ese plano) que en el pto. $\bar{p}$ tiene una recta tangente $\partial_x f(x_0,y_0)$ $\Rightarrow$ se tiene el vector $v_1=(1,0,\partial_x f(x_0,y_0))$. Análogamente, el vector $v_2=(0,1,\partial_y f(x_0,y_0))$ es un vector en la dirección de la recta tangente a la curva $z=f(x_0,y)$ que se encuentra en el plano $x=x_0$.

Hacemos $v_1\times v_2=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 0 & \partial_x f(x_0,y_0)\\ 0 & 1 & \partial_y f(x_0,y_0)\end{vmatrix}=(-\partial_x f(x_0,y_0),-\partial_y f(x_0,y_0),1)$

el cual es un vector perpendicular a S dada por la gráfica de la función $z=f(x,y)$ en el pto. $\bar{p}=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$.
El plano tangente debe contener a todas las rectas tangentes a la superficie $z=f(x,y)$ en el pto. $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ $\Rightarrow$ el plano debe tener por vector normal al vector $(-\partial_x f(x_0,y_0),-\partial_y f(x_0,y_0),1)$ y debe de pasar por el pto. $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, $\therefore$ debe de satisfacer la ec.:

$$((x,y,z)-(x_0,y_0,f(x_0,y_0)))\cdot(-\partial_x f(x_0,y_0),-\partial_y f(x_0,y_0),1)=0$$

i,e

$$\boxed{z=f(x_0,y_0)+\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)+\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

a) $f(x,y) = x^2 + xy - y^2$ en $(x_0, y_0) = (2, -1)$

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 5)$

Sol.

a) $f(x_0, y_0) = 2^2 + (2)(-1) - (-1)^2 = 1$

$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0 + y_0 = 3$

$\partial_y f(x_0, y_0) = x_0 - 2y_0 = 4$

$\therefore$ $z = 1 + 3(x-2) + 4(y+1)$ $\therefore$ $z = 3x + 4y - 1$ es la ec. del plano tangente de f en $(2, -1)$

b) $f(x_0, y_0) = (1)^2 + (2)^2 = 5$

$\partial_x f(x_0, y_0) = 2x_0 = 2$

$\partial_y f(x_0, y_0) = 2y_0 = 4$

$\therefore$ $z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2)$ $\therefore$ $z = 2x + 4y - 5$ es la ec. del plano tangente de f en $(1, 2, 5)$