22/04/2014

1) Diferencial total $df = \partial_x f\,dx + \partial_y f\,dy$

a) $z = f(x,y) = x^2y^2 + 3xy^2 - 2y^4$

b) $z = f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+2y^2}$

c) $z = f(x,y) = \ln(x^4 - y^3)$

d) $z = f(x,y) = x^y$

e) $w = f(x,y,z) = x^2 - 2xz + y^3$

Sol.

a) $df = (2xy^2 + 3y^2)dx + (2x^2y + 6xy - 8y^3)dy$

b) $df = \dfrac{(x^2+2y^2)y - xy(2x)}{(x^2+2y^2)^2}dx + \dfrac{(x^2+2y^2)x - xy(4y)}{(x^2+2y^2)^2}dy$

$= \dfrac{(2y^3 - x^2y)dx + (x^3 - 2xy^2)dy}{(x^2+2y^2)^2}$

c) $df = \dfrac{4x^3}{x^4-y^3}dx - \dfrac{3y^2}{x^4-y^3}dy = \dfrac{4x^3dx - 3y^2dy}{x^4-y^3}$

d) $df = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\,dy$

e) $df = (2x - 2z)dx + 3y^2dy - 2x\,dz$

2) Aplicaciones de la diferencial (cálculo de errores)

a) Calcular la variación aproximada de $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ donde x varía de $x=2$ a $x=2.5$ y y varía de $y=4$ a $y=4.5$

$$dz = \frac{(\cancel{x}-y)-(\cancel{x}+y)}{(x-y)^2}dx + \frac{(x-\cancel{y})+(x+\cancel{y})}{(x-y)^2}dy = \frac{2}{(x-y)^2}(x\,dy - y\,dx)$$

de los datos dados podemos obtener que $x=2$, $dx = dy = \frac{1}{2}$ y $y=4$

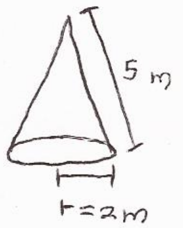
$$\Rightarrow dz = \frac{2}{(2-4)^2}\left(2\left(\tfrac{1}{2}\right) - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}$$

b) Calcula la variación del área de un triángulo rectángulo con base x y altura y, cuyos errores son h y k respectivamente.

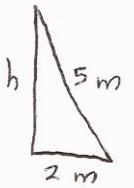
$A_\Delta = \dfrac{xy}{2} \Rightarrow dA_\Delta = \dfrac{y}{2}dx + \dfrac{x}{2}dy$, pero como $dx = h$ y, $dy = k$

$$\Rightarrow dA_\Delta = \frac{1}{2}(yh + xk)$$

c) Calcula el error asociado al volumen de un cono cuyos lados con un flexómetro son:



$$V_\Delta = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow dV_\Delta = \frac{\pi}{3}(2rh\,dr + r^2 dh)$$



$$\Rightarrow h = \sqrt{(5m)^2 - (2m)^2} = \sqrt{21}\,m$$

$$r = 2m$$

Como el cono se mide con un flexómetro $\Rightarrow$ la incertidumbre (error) asociada a la medición es la mitad de la mínima escala (1mm), i,e $dr = dh = 0.5\text{ mm} = 5\times10^{-4}\text{ m}$

$$\therefore dV_\Delta = \underline{1.17\times10^{-2}\text{ m}^3}$$

3) Diferencial de orden n. $d^n f = (\partial_x dx + \partial_y dy)^n f$

a) $d^3 f(x,y)$ para $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

b) $d^2 f(x,y)$ para $f(x,y) = e^{i(x-y)}$

Sol.

a) $d^3 f = (\partial_x^3 dx^3 + 3\partial^3_{xxy} dx^2 dy + 3\partial^3_{xyy} dx\,dy^2 + \partial_y^3 dy^3) f$

$\partial_x f = 2x e^{x^2+y^2}$, $\partial_x^2 f = (2+4x^2)e^{x^2+y^2}$, $\partial_x^3 f = (8x + 8x^3 + 4x)e^{x^2+y^2}$

$\partial_y f = 2y e^{x^2+y^2}$, $\partial_y^2 f = (2+4y^2)e^{x^2+y^2}$, $\partial_y^3 f = (8y + 8y^3 + 4y)e^{x^2+y^2}$

$\partial^2_{xy} f = 4xy\,e^{x^2+y^2}$, $\partial^3_{xxy} f = (4y + 8x^2 y)e^{x^2+y^2}$

$\partial^3_{xyy} f = (4x + 8xy^2)e^{x^2+y^2}$

$$\therefore d^3 f(x,y) = 4\left[(2x^3+3x)dx^3 + 3(2x^2y+y)dx^2dy + 3(2xy^2+x)dx\,dy^2 + (2y^3+3y)dy^3\right] \cdot e^{x^2+y^2}$$

b) $d^2 f = (\partial_x^2 dx^2 + 2\partial^2_{xy} dx\,dy + \partial_y^2 dy^2) f$

$\partial_x f = i e^{i(x-y)}$, $\partial_x^2 f = i^2 e^{i(x-y)} = -e^{i(x-y)}$ pues $i^2 = -1$

$\partial_y f = -i e^{i(x-y)}$, $\partial_y^2 f = i^2 e^{i(x-y)} = -e^{i(x-y)}$

$\partial^2_{xy} f = -i^2 e^{i(x-y)} = e^{i(x-y)}$

$$\therefore d^2 f(x,y) = -(dx^2 - 2dx\,dy + dy^2)e^{i(x-y)}$$

22/04/2014

4) Laplaciano $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$

a) $f(x,y,z) = x^2 y^2 z^2$

b) $f(x,y,z) = \ln xyz$

c) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

Sol.

a) $\nabla^2 f = 2(y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2)$

b) $\nabla^2 f = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$

c) $\nabla^2 f = 3e^{x+y+z}$

5) Aplicaciones de ∇^2 y ∂^n $n \geq 1$

La mayor parte de las aplicaciones de estos operadores son en fenómenos físicos, cuando uno arroja una piedra a un estanque o charco de agua se puede ver las ondas que se generan, cuando uno utiliza el horno de microondas para calentar la comida, cuando uno fija un extremo de una cuerda y se produce una perturbación (movimiento) en el otro, el escuchar la radio o ver la televisión, el hablar por celular, entre otras bastantes aplicaciones, todas ellas regidas por la ecuación de onda

$$\nabla^2 f - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

el cual involucra un laplaciano, una segunda derivada temporal y la velocidad de onda (v) en el medio, para la función $f(\vec{r},t)$. Si nos vamos al mundo cuántico, éste se rige principalmente por la ecuación de Shrödinger

$\hat{H}\Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ con $\hat{H}$ como el hamiltoniano del sistema, $\Psi(\vec{r},t)$ la función de onda, $\hbar$ la constante de Dirac, donde $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\vec{r})$ con $\hat{V}(\vec{r})$ la energía potencial y $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ la energía cinética.

En donde la resolución de la ec. de Shrödinger para un potencial ideal (barrera de potencial ⎍) conllevó al descubrimiento del famoso "efecto túnel cuántico", el cual fue la base para la creación del microscopio de tunelaje, capaz de captar imágenes a escala atómica.

Otra fuerte aplicación es en el electromagnetismo, la cual es regida principalmente por las 4 famosas Leyes de Maxwell, las cuales involucran divergencias, rotacionales y parciales temporales de los campos eléctrico y magnético, y la relación entre ellos.

Por lo cual, aplicaciones de los operadores $\nabla^2, \nabla, \partial$ son muy diversas e importantes hoy en día, en un pasado y en un futuro para el ser humano.