29/04/2014

1) Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Encontrar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = (\sqrt{x}, y) = (x', y')$

b) $f(x,y) = (ye^x, \sqrt{y}) = (x', y')$

c) $f(x,y) = (\sqrt{1+x^2+y^2}, xy, \sqrt{1-x^2-y^2}) = (x', y', z')$

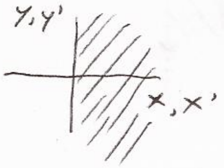
d) $f(x) = (\ln x, e^x, \operatorname{sen} x) = (x', y', z')$

e) $f(x,y) = (\cos xy, \frac{1}{x^2-y^2}) = (x', y')$

Sol.

a) $\operatorname{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$

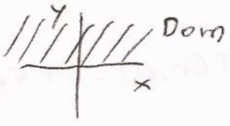
$\operatorname{Im} f = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid x' \geq 0\}$

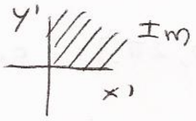


Dom = Im

b) $\operatorname{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

$\operatorname{Im} f = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 \mid x' \geq 0, \ y' \geq 0\}$





c) $\operatorname{Dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

Si hacemos un cambio a coordenadas polares será más fácil determinar la imagen.

$\Rightarrow f(r,\theta) = (\sqrt{1+r^2}, r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta, \sqrt{1-r^2})$

Como $r_{mín} = 0$ y $r_{máx} = 1 \Rightarrow x'_{mín} = 1$ y $x'_{máx} = \sqrt{2}$ y

$z'_{máx} = 1$ y $z'_{mín} = 0$

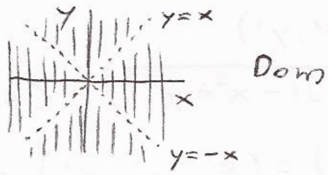
Ahora analicemos y'; las funciones seno y coseno tienen la característica de que cuando uno es máximo el otro es mínimo, entonces, eso nos hace pensar que hay que considerar los ángulos en los que el seno y el coseno valen lo mismo (salvo por signos) i,e, $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$, y para estos ángulos se puede determinar que $y'_{mín} = -\frac{1}{2}$ y $y'_{máx} = \frac{1}{2}$

$\therefore \operatorname{Im} f = [1, \sqrt{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [0, 1]$

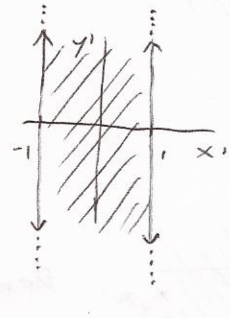
d) $\mathrm{Dom} f = (0,\infty)$

$\mathrm{Im} f = (-\infty,\infty)\times(1,\infty)\times[-1,1]$

e) $\mathrm{Dom} f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\neq |x|\}$

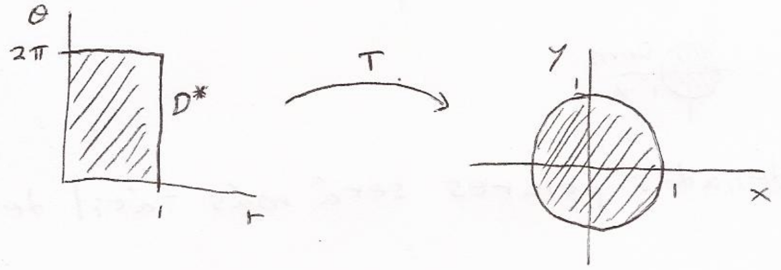


$\mathrm{Im} f = [-1,1]\times(-\infty,\infty)$



2) Transformación de regiones.

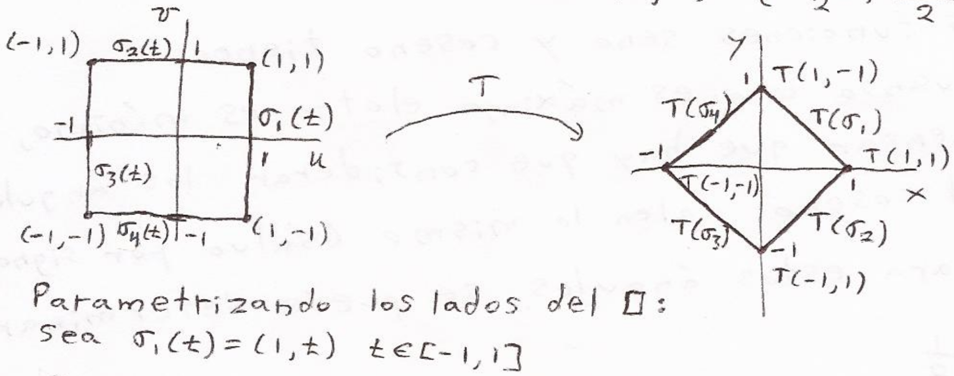
a) $D^* = [0,1]\times[0,2\pi]$ con $T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$



pues si $(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) = (x,y)$

$\Rightarrow x^2+y^2 = r^2 \leq 1$

b) $D^* = [-1,1]\times[-1,1]$ con $T(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$



Parametrizando los lados del $\square$:

Sea $\sigma_1(t) = (1,t)$ $t\in[-1,1]$

$\Rightarrow T(\sigma_1(t)) = T(1,t) = \left(\frac{1+t}{2}, \frac{1-t}{2}\right) = (x,y)$ $\Rightarrow \frac{1+t}{2} = x \Rightarrow t = 2x-1$

$\Rightarrow y = \frac{1-t}{2} = \frac{1-2x+1}{2} = 1-x$

29/04/2014

$\sigma_2(t) = (t, 1) \quad t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow T(\sigma_2(t)) = T(t, 1) = \left(\frac{t+1}{2}, \frac{t-1}{2}\right) = (x, y) \quad \Rightarrow \frac{t+1}{2} = x \quad \Rightarrow t = 2x - 1$

$\Rightarrow y = \frac{t-1}{2} = \frac{2x-1-1}{2} = x - 1$

$\sigma_3(t) = (-1, t) \quad t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow T(\sigma_3(t)) = T(-1, t) = \left(\frac{-1+t}{2}, \frac{-1-t}{2}\right) = (x, y) \quad \Rightarrow \frac{-1+t}{2} = x \quad \Rightarrow t = 2x + 1$

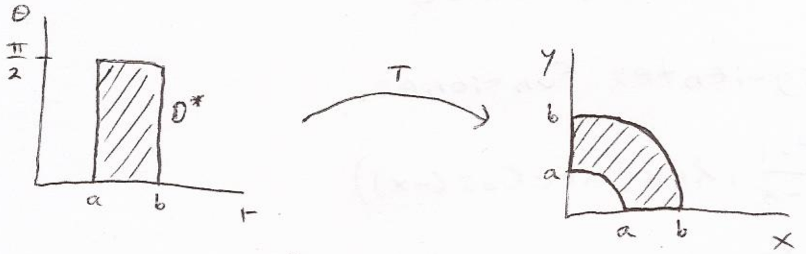
$\Rightarrow y = \frac{-1-t}{2} = \frac{-1-2x-1}{2} = -1 - x$

$\sigma_4(t) = (t, -1) \quad t \in [-1, 1]$

$\Rightarrow T(\sigma_4(t)) = T(t, -1) = \left(\frac{t-1}{2}, \frac{t+1}{2}\right) = (x, y) \quad \Rightarrow \frac{t-1}{2} = x \quad \Rightarrow t = 2x + 1$

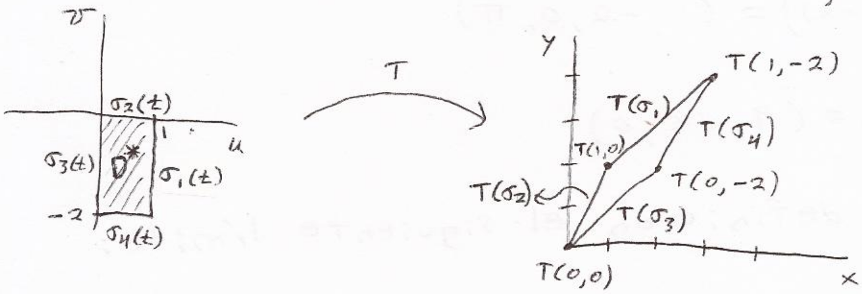
$\Rightarrow y = \frac{t+1}{2} = \frac{2x+1+1}{2} = x + 1$

c) $D^* = [a, b] \times [0, \frac{\pi}{2}] \quad 0 < a < b \quad$ con $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{Sen}\theta)$



Procediendo de manera análoga que en a).

d) $D^* = [0, 1] \times [-2, 0] \quad$ con $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$



Parametrizando los lados del $\square$:

Sea $\sigma_1(t) = (1, t) \quad t \in [-2, 0]$

$\Rightarrow T(\sigma_1(t)) = T(1, t) = (1 - t, 2 - t) = (x, y) \quad \Rightarrow 1 - t = x \quad \Rightarrow t = 1 - x$

$\Rightarrow y = 2 - t = 2 - 1 + x = x + 1$

$\sigma_2(t) = (t,0) \quad t \in [0,1]$

$\Rightarrow T(\sigma_2(t)) = T(t,0) = (t, 2t) = (x,y) \Rightarrow \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t = 2x \end{array}$

$\sigma_3(t) = (0,t) \quad t \in [-2,0]$

$\Rightarrow T(\sigma_3(t)) = T(0,t) = (-t, -t) = (x,y) \Rightarrow \begin{array}{l} x = -t \\ y = -t = x \end{array}$

$\sigma_4(t) = (t,-2) \quad t \in [0,1]$

$\Rightarrow T(\sigma_4(t)) = T(t,-2) = (t+2, 2t+2) = (x,y) \Rightarrow x = t+2 \Rightarrow t = x-2$

$\Rightarrow y = 2t+2 = 2x-4+2 = 2x-2$

3) Límites de funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Sea $f: \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con $f(\bar{x}) = (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})) \quad \forall \bar{x} \in \Omega$

$$\Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f_1(\bar{x}), \ldots, f_m(\bar{x})) = \left(\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_1(\bar{x}), \ldots, \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f_m(\bar{x}) \right)$$

$$= (L_1, \ldots, L_m) = \bar{L}$$

si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni \ 0 \leq \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\bar{x}) - \bar{L}\| < \varepsilon$

a) Calcular el límite de las siguientes funciones:

•) $\lim_{x \to 1} f(x)$ con $f(x) = \left(x^2, \frac{x^2-1}{1-x}, \ln x, \arccos(-x)\right)$

••) $\lim_{(x,y) \to (3,4)} f(x,y)$ con $f(x,y) = \left(x^{y/2}, y^x, \cos\left(\frac{2\pi x}{y}\right)\right)$

<u>Sol.</u>

•) $\lim_{x \to 1} \left(x^2, \frac{x^2-1}{1-x}, \ln x, \arccos(-x)\right) = (1, -2, 0, \pi)$

••) $\lim_{(x,y) \to (3,4)} \left(x^{y/2}, y^x, \cos\left(\frac{2\pi x}{y}\right)\right) = (9, 64, 0)$

b) Calcula y demuestra por definición el siguiente límite:

$\lim_{(x,y) \to (1,1)} (xy, x+y, x-y)$

<u>Sol.</u>

$\lim_{(x,y) \to (1,1)} (xy, x+y, x-y) = (1, 2, 0)$

29/04/2014

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \ \ni \ \|(x-1, y-1)\| < \delta \Rightarrow \|(xy-1, x+y-2, x-y)\| < \varepsilon$

Sabemos que $|x-1| < \delta$ y $|y-1| < \delta \Rightarrow$

$$\sqrt{(xy-1)^2 + (x+y-2)^2 + (x-y)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon$$

$\Rightarrow |xy-1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

Ahora bien,

$|xy-1| = |xy-y+y-1| \leq |y||x-1| + |y-1| < |y|\delta + \delta \ \ldots ①$

Sea $\delta' = 1 \Rightarrow |y-1| < \delta' = 1 \Rightarrow -1 < y-1 < 1 \Rightarrow 0 < y < 2 \Rightarrow |y| < 2$

$\therefore \ ① < 2\delta + \delta = 3\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \qquad \therefore$ sea $\delta_1 = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3\sqrt{3}}\right\}$

Para la segunda entrada tenemos que $|x+y-2| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

pero $|x+y-2| = |x+y-1-1| \leq |x-1| + |y-1| < \delta + \delta = 2\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ sea $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}}$

Y para la tercera entrada $|x-y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, pero

$|x-y| = |x-y-1+1| \leq |x-1| + |-(y-1)| = |x-1| + |y-1| < \delta + \delta = 2\delta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ sea $\delta_3 = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}} = \delta_2$

$\therefore$ para demostrar el límite basta con tomar a $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2\sqrt{3}}, \frac{\varepsilon}{3\sqrt{3}}\right\}$

4) Continuidad

Una función $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$.

a) Demostrar si la siguiente función es continua en $\bar{x}_0 = (0,0)$

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y))$ con $f_1(x,y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f_2(x,y) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{xy}\right) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ y $f_3(x,y) = xy$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(y^2 \operatorname{Sen}\left(\tfrac{1}{x}\right), x^2 \operatorname{Cos}\left(\tfrac{1}{xy}\right), xy\right) = (0,0,0)$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ni \ \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \|(y^2 \operatorname{Sen}(\tfrac{1}{x}), x^2 \operatorname{Cos}(\tfrac{1}{xy}), xy)\| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \sqrt{(y^2 \operatorname{Sen}(\tfrac{1}{x}))^2 + (x^2 \operatorname{Cos}(\tfrac{1}{xy}))^2 + (xy)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}} = \varepsilon$$

$\Rightarrow |y^2 \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, pero $|y^2 \operatorname{sen}(\tfrac{1}{x})| \leq |y^2| = |y|^2 < \delta^2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ Sea $\delta_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}$

De manera totalmente análoga para la segunda entrada se obtiene $\delta_2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} = \delta_1$

y para la 3era. entrada tenemos $|xy| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, pero
$|xy| = |x||y| < \delta \cdot \delta = \delta^2 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ se obtiene $\delta_3 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}} = \delta_1 = \delta_2$

$\therefore$ el límite de f sí es el $(0,0,0)$, y basta con tomar $\delta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}}$

Por otro lado, $f_1(0,0) = 0$, $f_2(0,0) = 0$ y $f_3(0,0) = 0$

$\therefore$ se cumple que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (f_1(x,y), f_2(x,y), f_3(x,y)) = (0,0,0) = (f_1(0,0), f_2(0,0), f_3(0,0))$$

$\therefore$ $f(x,y)$ es continua en $(0,0)$

5) Matrices asociadas a transformaciones lineales.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y) = (2x+y, x-3y)$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ de 2×2 es la matriz asociada a T.

29/04/2014

b) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y,z) = (2x+y-3z, x-y)$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y-3z \\ x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

donde la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ de 2×3 es la matriz asociada a T.

c) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad T(x,y) = (x,y)$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (Identidad) de 2×2 es la matriz asociada a T.

En general, para $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la matriz asociada a T tendrá una dimensión de $m \times n$.