08/05/2014

Teorema de la Función implícita (2a. versión)

Este teorema nos dice que si hay un punto p para el cual $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y)$ se haga cero $\Rightarrow$ en las cercanías de p $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$ se puede ver como $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y se tendrán las derivadas implícitas:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n)} \quad \text{con } \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

1) Calcular las siguientes derivadas implícitas.

a) $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3$ en $p = (1,1,1)$

b) $F(x,y,z,u,v) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4u^2 v + e^{u+v} - 1$ en $p = (0,0,0,0,0)$

Sol.

a) Asumiendo $z = f(x,y)$ vemos que $F(p) = 0$ $\Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_p = -\left.\frac{2x}{2z}\right|_p = -\left.\frac{x}{z}\right|_p = -1$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\right|_p = -\left.\frac{2y}{2z}\right|_p = -\left.\frac{y}{z}\right|_p = -1$$

b) Asumiendo $v = f(x,y,z,u)$ (ya que $\partial_v F(p) \neq 0$) vemos que $F(p) = 0$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_p = -\left.\frac{2x}{4u^2 + e^{u+v}}\right|_p = 0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_p = -\left.\frac{4y}{4u^2 + e^{u+v}}\right|_p = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_p = -\left.\frac{6z}{4u^2 + e^{u+v}}\right|_p = 0 \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial u}\right|_p = -\left.\frac{8uv + e^{u+v}}{4u^2 + e^{u+v}}\right|_p = -1$$

2) Verificar que se cumple el Teorema de Schwartz en p de la siguiente función.

$F(x,y,z) = xyz - e^{z}$ en $p = (e^{2}, \frac{1}{2}, 2)$

Vemos que $F(p) = 0$ y asumiendo que $z = f(x,y)$ (pues $\partial_z F(p) \neq 0$)

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p = -\left.\frac{yz}{xy - e^{z}}\right|_p = 2e^{-2} \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_p = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{yz}{xy-e^{z}}\right)\Bigg|_p = -\left.\frac{(xy-e^{z})z - xyz}{(xy-e^{z})^2}\right|_p$$

$$= 8e^{-2}$$

Ahora

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p = -\left.\frac{xz}{xy-e^{z}}\right|_p = 4 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_p = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{xz}{xy-e^{z}}\right)\Bigg|_p = -\left.\frac{(xy-e^{z})z - xyz}{(xy-e^{z})^2}\right|_p$$

$$= 8e^{-2}$$

$\therefore \partial^2_{xy} z\big|_p = 8e^{-2} = \partial^2_{yx} z\big|_p$ $\therefore$ como las parciales cruzadas son iguales se cumple el Teo. de Schwartz.

3) Suponga que la expresión $F(x,y,z) = 0$ determina implícitamente funciones diferenciables $x = x(y,z)$, $y = y(x,z)$, $z = z(x,y)$. Demostrar que

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$$

Nota: esta última expresión tiene muchas aplicaciones en Termodinámica, en escencia, en ecuaciones de estado, con x, y, z como presión, volumen y temperatura en un sistema termodinámico dado, a su vez, se usa para determinar relaciones entre entropía, entalpía, energía libre de Gibbs y de Helmholzt, energía interna, entre otras.

08/05/2014

Dem.

Como $x = x(y,z) \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ con $\dfrac{\partial F}{\partial x} \neq 0$

Como $y = y(x,z) \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial z} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ con $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

Como $z = z(x,y) \Rightarrow \dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ con $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}}}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}}}\right)\left(\frac{\cancel{\frac{\partial F}{\partial z}}}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}}}\right)\left(\frac{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}}}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial z}}}\right) = -1 \quad \therefore \partial_y x \, \partial_z y \, \partial_x z = -1$$

4) Suponga que la expresión $F(x,y) = 0$ determina funciones diferenciables $x = f(y)$ y $y = g(x)$. Demostrar que $f'(y)g'(x) = 1$

Análogo al anterior.

como $x = f(y) \Rightarrow \dfrac{\partial x}{\partial y} = f'(y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}$ con $\dfrac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ y como

$y = g(x) \Rightarrow \dfrac{\partial y}{\partial x} = g'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ con $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = f'(y)g'(x) = \left(-\frac{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}}}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}}}\right)\left(-\frac{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}}}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}}}\right) = 1 \quad \therefore f'(y)g'(x) = 1$$

5) Calcular las parciales de 2º orden de $\operatorname{Sen} xy + z + \operatorname{Sen} z = 0$ donde $z = f(x,y)$.

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y \cos xy}{1 + \cos z} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{y^2 \operatorname{Sen} xy}{1 + \cos z}$

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x \cos xy}{1 + \cos z} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{x^2 \operatorname{Sen} xy}{1 + \cos z}$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\cos xy - xy \operatorname{Sen} xy}{1 + \cos z}$

6) Hallar la dirección de mayor crecimiento de la función $z=f(x,y)$ dada implícitamente por $\arctan(x+y+z)+3xyz+z=0$ en $p=(0,0,0)$.

La dirección de mayor crecimiento está dada por

$$\nabla f(p)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(p),\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_p=-\left.\frac{\frac{1}{1+(x+y+z)^2}+3yz}{\frac{1}{1+(x+y+z)^2}+3xy+1}\right|_p=-\frac{1}{2}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_p=-\left.\frac{\frac{1}{1+(x+y+z)^2}+3xz}{\frac{1}{1+(x+y+z)^2}+3xy+1}\right|_p=-\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \nabla z(p)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore$ La dirección de mayor crecimiento de f en el punto $(0,0,0)$ es $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

7) <u>Plano tangente</u>

Teniendo $F(x,y,z)=0$, $p=(x_0,y_0,z_0)$ y asumiendo $z=f(x,y)$ obtenemos las pendientes en x,y

$$\frac{\partial f}{\partial x}(p)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(p)}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)} \quad y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(p)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(p)}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}$$

y haciendo el mismo procedimiento que se hace para determinar el plano tangente se obtiene

$$z-z_0=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(p)}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}(x-x_0)-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(p)}{\frac{\partial F}{\partial z}(p)}(y-y_0) \quad , i,e$$

$$\boxed{\partial_x F(p)(x-x_0)+\partial_y F(p)(y-y_0)+\partial_z F(p)(z-z_0)=0}$$

08/05/2014

a) $F(x,y,z) = xyz + \ln(xyz) - z$ en $p=(1,1,1)$, $z=f(x,y)$

b) $F(x,y,z) = xe^x + ye^y + ze^z - 3e$ en $p=(1,1,1)$, $z=f(x,y)$

Sol.

a) $\partial_x F(p) = yz + \frac{1}{x}\Big|_p = 2$

$\partial_y F(p) = xz + \frac{1}{y}\Big|_p = 2$

$\partial_z F(p) = xy + \frac{1}{z} - 1\Big|_p = 1$

$\therefore 2(x-1) + 2(y-1) + (z-1) = 0$

$\Rightarrow \underline{2x+2y+z-5=0}$ es la ec. del plano tangente en p

b) $\partial_x F(p) = (1+x)e^x\Big|_p = 2e$

$\partial_y F(p) = (1+y)e^y\Big|_p = 2e$

$\partial_z F(p) = (1+z)e^z\Big|_p = 2e$

$\therefore 2e(x-1) + 2e(y-1) + 2e(z-1) = 0$

$\Rightarrow \underline{x+y+z-3=0}$ es la ec. del plano tangente en p