13/05/2014

① Sistemas de ec.

Si tenemos $F(x,y,u,v)=0$ y $G(x,y,u,v)=0$ y p un punto en $\mathbb{R}^4$ $\ni F(p)=G(p)=0 \Rightarrow$ en las cercanías de p podemos ver a $u=u(x,y)$ y a $v=v(x,y)$ y el sistema de ecuaciones puede resolverse si: $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(p) = \begin{vmatrix} \partial_u F & \partial_v F \\ \partial_u G & \partial_v G \end{vmatrix}_p \neq 0.$ donde la solución al sistema es:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}$$

a) $F(x,y,u,v) = xe^{u+v} + uv - 1 = 0$
$G(x,y,u,v) = ye^{u-v} - 2uv - 1 = 0$ y $p=(1,1,0,0)$

Sol.

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}(p) = \begin{vmatrix} xe^{u+v}+v & xe^{u+v}+u \\ ye^{u-v}-2v & -ye^{u-v}-2u \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$ $\therefore$ tiene solución.

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \partial_x F & \partial_v F \\ \partial_x G & \partial_v G \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} e^{u+v} & xe^{u+v}+u \\ 0 & -ye^{u-v}-2u \end{vmatrix}_p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \partial_u F & \partial_x F \\ \partial_u G & \partial_x G \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} xe^{u+v}+v & e^{u+v} \\ ye^{u-v}-2v & 0 \end{vmatrix}_p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \partial_y F & \partial_v F \\ \partial_y G & \partial_v G \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & xe^{u+v}+u \\ e^{u-v} & -ye^{u-v}-2u \end{vmatrix}_p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \partial_u F & \partial_y F \\ \partial_u G & \partial_y G \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} xe^{u+v}+v & 0 \\ ye^{u-v}-2v & e^{u-v} \end{vmatrix}_p = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

b) La función $z=f(x,y)$ está dada como $z=u+v$ donde u y v son funciones implícitas determinadas por el par de expresiones

$$F(x,y,u,v)=u+e^{u+v}-x=0$$
$$G(x,y,u,v)=v+e^{u-v}-y=0 \qquad y \quad p=(1,1,0,0)$$

Hallar la ec. del plano tangente a z en p.

Sol.

La ec. del plano tangente está dada por

$$z=\frac{\partial z}{\partial x}(p)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(p)(y-y_0)$$

$\Rightarrow$ necesitamos calcular $\frac{\partial z}{\partial x}(p)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(p)$

$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}$ $\therefore$ necesitamos calcular las parciales de u y v respecto de x y y; para calcular las mismas, podemos ocupar las expresiones dadas en ①, pero a veces en la práctica resulta muy tardado hacer esto, por lo cual, en este ejercicio se obtendrán directamente derivando a F y G respecto a x y y, recordando que $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+e^{u+v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)-1=0\Big|_p \Rightarrow 2\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}-1=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}+e^{u-v}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0\Big|_p \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x}=1$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}(p)=0+1=1$$

De forma análoga

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+e^{u+v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0\Big|_p \Rightarrow 2\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}+e^{u-v}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)-1=0\Big|_p \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=1 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}=-2$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}(p)=1-2=-1$$

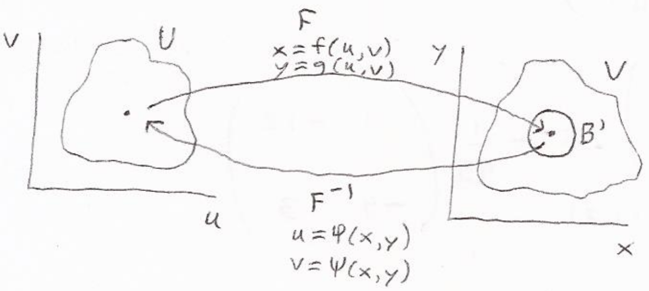
13/05/2014

$\therefore$ la ec. del plano tangente es:

$$z = (1)(x-1) + (-1)(y-1) \qquad \therefore\ \underline{z = x - y}$$

② Función inversa

Sea $F: U \subset \mathbb{R}^2 \to V \subset \mathbb{R}^2$ con $F(u,v) = (f(u,v), g(u,v)) = (x,y)$



El objetivo de esta parte, es que si tenemos una función $F(u,v)$ de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ que manda un punto en coordenadas cartesianas u,v, a otro punto en coordenadas cartesianas x,y, donde x,y son las entradas de $F(u,v)$ dadas por $x = f(u,v)$, $y = g(u,v)$, podamos tener (en una bola B') a F^{-1}, y así establecer funciones implícitas $u = \varphi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$ y calcular sus derivadas parciales respecto a x,y, mediante las expresiones:

$$\partial_x u = \frac{\partial_v g}{\Delta}, \quad \partial_y u = -\frac{\partial_v f}{\Delta}, \quad \partial_x v = -\frac{\partial_u g}{\Delta}, \quad \partial_y v = \frac{\partial_u f}{\Delta}$$

con $\Delta = \det JF = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(p) \neq 0$, i,e

$$JF^{-1}(x,y) = (JF(u,v))^{-1} = \frac{1}{\det JF}\begin{pmatrix} \partial_v g & -\partial_v f \\ -\partial_u g & \partial_u f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix}$$

a) $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(u,v) = (u^3 + v^3, u^2 + uv) = (f(u,v), g(u,v)) = (x,y)$

Si tomamos $(u,v) = (1,2) \Rightarrow F(1,2) = (9,3)$ y

$$\det JF(1,2) = \begin{vmatrix} 3u^2 & 3v^2 \\ 2u+v & u \end{vmatrix}_{(1,2)} = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

$\Rightarrow$ en las cercanías de $(9,3)$ $(B'_\varepsilon(9,3))$ se da F^{-1}, i,e podemos despejar de $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$ a u y v como $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$ y su derivada es:

$$JF^{-1}(x,y)=(JF(u,v))^{-1}=\frac{1}{\det JF}\begin{pmatrix}\partial_v g & -\partial_v f\\ -\partial_u g & \partial_u f\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{1}{45}\begin{pmatrix}u & -3v^2\\ -2u-v & 3u^2\end{pmatrix}_{(1,2)}=-\frac{1}{45}\begin{pmatrix}1 & -12\\ -4 & 3\end{pmatrix}$$

$\therefore$ $\partial_x u=-\frac{1}{45}$, $\partial_y u=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}$, $\partial_x v=\frac{4}{45}$, $\partial_y v=-\frac{3}{45}=-\frac{1}{15}$

donde es claro que $(JF(1,2))(JF^{-1}(9,3))=\mathbb{I}$

b) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ con $F(u,v)=(e^{u+v},e^{u-v})=(x,y)$

calculando el $\det JF=\begin{vmatrix}e^{u+v} & e^{u+v}\\ e^{u-v} & -e^{u-v}\end{vmatrix}=-e^{2u}-e^{2u}=-2e^{2u}\neq 0$

$\Rightarrow$ F es invertible en todo $\mathbb{R}^2$ y

$$JF^{-1}(x,y)=(JF(u,v))^{-1}=-\frac{1}{2e^{2u}}\begin{pmatrix}-e^{u-v} & -e^{u+v}\\ -e^{u-v} & e^{u+v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{-u-v} & \frac{1}{2}e^{-u+v}\\ \frac{1}{2}e^{-u-v} & -\frac{1}{2}e^{-u+v}\end{pmatrix}$$

donde $\partial_x u=\frac{1}{2}e^{-u-v}$, $\partial_y u=\frac{1}{2}e^{-u+v}$, $\partial_x v=\frac{1}{2}e^{-u-v}$ y $\partial_y v=-\frac{1}{2}e^{-u+v}$

Observación: en este caso particular, sí es posible hacer explícitas las funciones $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, i,e

como $\left.\begin{array}{l} e^{u+v}=x \Rightarrow u+v=\ln x\\ e^{u-v}=y \Rightarrow u-v=\ln y\end{array}\right\}$ pudiendo deducir sin dificultad

que $u=\frac{1}{2}(\ln x+\ln y)$, $v=\frac{1}{2}(\ln x-\ln y)$ y sacando las derivadas

13/05/2014

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}\ , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{1}{y}\ , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{1}{x} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2}\frac{1}{y}$$

concordantes con las que se habían encontrado en la matriz, haciendo $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$.

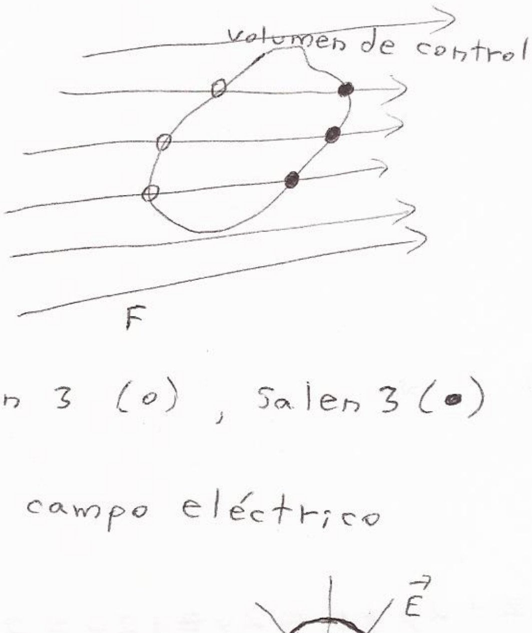
③ Divergencia

Sea $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

La divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo saliente y el flujo entrante de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen de control, si el campo tiene fuentes $\Rightarrow$ la divergencia será positiva, y si tiene pozos o sumideros la divergencia será negativa.

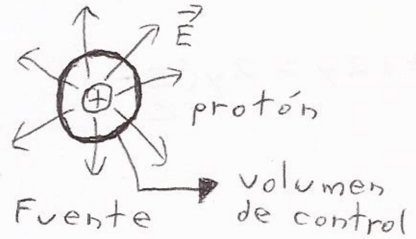
Se expresa como:

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = tr(JF) = \sum_i \partial_{x_i} F_i$$

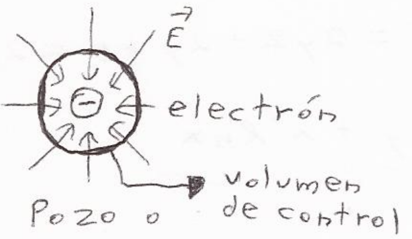


Entran 3 (o) , Salen 3 (•) $\therefore\ \nabla \cdot F = 0$

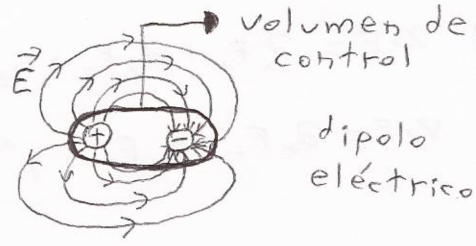
Sea $F = \vec{E}$ campo eléctrico



Fuente (divergencia positiva)

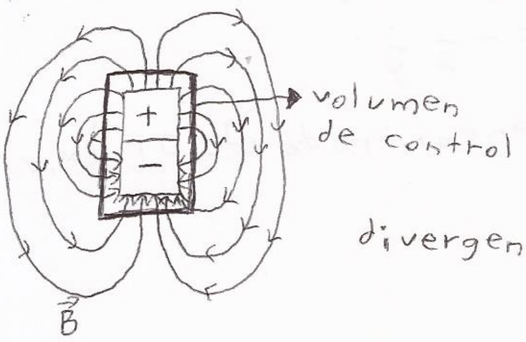


Pozo o Sumidero (divergencia negativa)



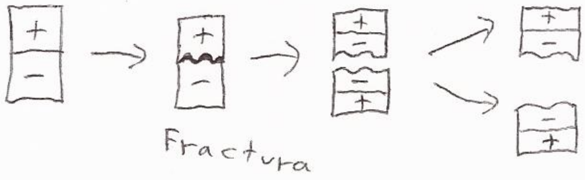
(divergencia 0)

Sea $F=\vec{B}$ campo magnético



divergencia 0

De hecho, en el campo magnético $\vec{B}$ no existen fuentes ni sumideros, esto debido a la segunda Ley de Maxwell, que nos dice $\nabla\cdot\vec{B}=0$, i,e, nos asegura la no existencia de los monopolos magnéticos, y ésto es fácil de ver, ¿qué pasa cuando a un imán lo partimos a la mitad? ¿nos quedamos en una mano al polo positivo y en la otra al negativo? NO Las 2 mitades tienen polo positivo y negativo cada una, conservando $\nabla\cdot\vec{B}=0$ en todo momento.



Calcular $\nabla\cdot F$

a) $F(x,y,z)=(2xyz,\ x^2+y^2,\ 3xy)$

b) $F(x,y)=(y^x,\ x^y)$

Sol.

a) $\nabla\cdot F=\partial_x F_1+\partial_y F_2+\partial_z F_3=2yz+2y+0=2yz+2y=2y(z+1)$

b) $\nabla\cdot F=\partial_x F_1+\partial_y F_2=y^x \ln y+x^y \ln x$

13/05/2014

Rotacional

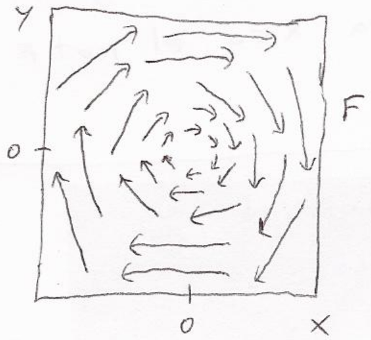
Sea $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

El rotacional es un operador vectorial que muestra la tendencia de un campo vectorial a inducir rotación alrededor de un punto.

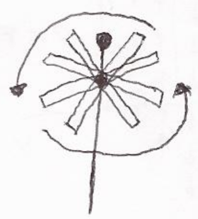
Se denota por:

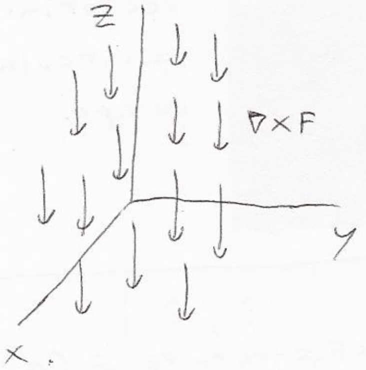
$$\text{rot } F = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (y,-x,0)$ un campo vectorial como se muestra.



Si consideramos de forma imaginaria unas paletas giratorias



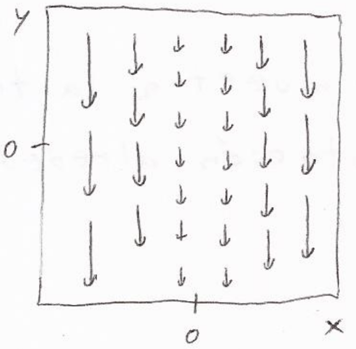


y la colocamos en $x>0, y>0$ $\Rightarrow$ la dirección del flujo del campo inducirá una rotación de la paleta $\circlearrowright$ en sentido horario, si ahora la colocamos en $x>0, y<0$; $x<0, y>0$ o $x<0, y<0$ el flujo inducirá el mismo sentido de giro $\circlearrowright$

$\therefore$ podríamos imaginar que $\nabla \times F = cte$, a saber

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{k} = cte$$ en la dirección de z negativo

ejemplo: Sea $F(x,y,z) = (0, -x^2, 0)$

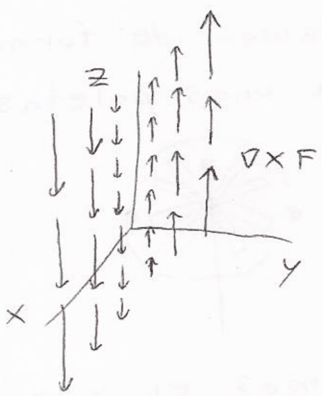


Si colocamos las paletas en $x>0$ $\Rightarrow$ el flujo inducirá un giro horario, pero si las colocamos en $x<0$ $\Rightarrow$ el flujo inducirá un giro antihorario

$\therefore$ podríamos imaginar que el $\nabla \times F$ tiene 2 direcciones, a saber

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -x^2 & 0 \end{vmatrix} = -2x\,\hat{k}$$

para $x>0$ el rot F apunta en Z negativo y para $x<0$ el rot F apunta en Z positivo



El rotacional de un campo vectorial mide la circulación del campo.

Calcular $\nabla \times F$

a) $F(x,y) = (3x^2e^y, 2xy)$

b) $F(x,y,z) = (x,y,z)$

Sol.

a) $\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3x^2e^y & 2xy & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2y - 3x^2e^y)$

b) $\nabla \times F = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (0,0,0)$

Propiedades de ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$

1) $\nabla \times \nabla F = 0$

2) $\nabla \cdot \nabla \times F = 0$

3) $\nabla \cdot \nabla F = \nabla^2 F$

4) $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$