30/01/2014

Teorema. Propiedades sobre límite.

Sean $f, g: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ y $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$

a) Si $\lim_{t \to t_0} f(t) = a$ y $\lim_{t \to t_0} g(t) = b \Rightarrow \lim_{t \to t_0} (f(t) + g(t)) = a + b$

Dem.

Si $\lim_{t \to t_0} f(t) = a$ y $\lim_{t \to t_0} g(t) = b$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \dagger \ 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \| f(t) - a \| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\| g(t) - b \| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore \| f(t) + g(t) - (a+b) \| = \| (f(t) - a) + (g(t) - b) \| \leq \| f(t) - a \| + \| g(t) - b \|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\quad \therefore \lim_{t \to t_0} (f(t) + g(t)) = a + b$ ▲

b) $\lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) = a \cdot b$

Tenemos que $f(t) \cdot g(t) = f_1(t) g_1(t) + \dots + f_n(t) g_n(t)$ y como

$\lim_{t \to t_0} f(t) = a$ y $\lim_{t \to t_0} g(t) = b$

$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i$ y $\lim_{t \to t_0} g_i(t) = b_i$ $\forall i$ con $i = 1, \dots, n$

$\therefore \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) = \lim_{t \to t_0} (f_1(t) g_1(t) + \dots + f_n(t) g_n(t))$

$= \lim_{t \to t_0} f_1(t) g_1(t) + \dots + \lim_{t \to t_0} f_n(t) g_n(t)$

$= \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t) \right) \left(\lim_{t \to t_0} g_1(t) \right) + \dots + \left(\lim_{t \to t_0} f_n(t) \right) \left(\lim_{t \to t_0} g_n(t) \right)$

$= a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = a \cdot b$

$\therefore \lim_{t \to t_0} f(t) \cdot g(t) = a \cdot b$ ▲

c) Para $n \leq 3$ $\quad \lim_{t \to t_0} f(t) \times g(t) = a \times b$

Tenemos que $f(t)\times g(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \\ g_1(t) & g_2(t) & g_3(t) \end{vmatrix}$

$$= (f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t),\ g_1(t)f_3(t) - f_1(t)g_3(t),\ f_1(t)g_2(t) - g_1(t)f_2(t))$$

$\therefore \lim_{t\to t_0} f(t)\times g(t)$

$$= \left(\lim_{t\to t_0}(f_2(t)g_3(t) - g_2(t)f_3(t)),\ \lim_{t\to t_0}(g_1(t)f_3(t) - f_1(t)g_3(t)),\ \lim_{t\to t_0}(f_1(t)g_2(t) - g_1(t)f_2(t))\right)$$

$$= \left(\left(\lim_{t\to t_0} f_2(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} g_3(t)\right) - \left(\lim_{t\to t_0} g_2(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} f_3(t)\right),\ \left(\lim_{t\to t_0} g_1(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} f_3(t)\right)\right.$$

$$\left. - \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} g_3(t)\right),\ \left(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} g_2(t)\right) - \left(\lim_{t\to t_0} g_1(t)\right)\left(\lim_{t\to t_0} f_2(t)\right)\right)$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3,\ b_1a_3 - a_1b_3,\ a_1b_2 - b_1a_2) = a\times b$$

$$\therefore \lim_{t\to t_0} f(t)\times g(t) = a\times b \ \blacktriangle$$

d) $\lim_{t\to t_0} \|f(t)\| = \|a\|$

$$\lim_{t\to t_0} \|f(t)\| = \lim_{t\to t_0} \left[f_1^2(t) + f_2^2(t) + \dots + f_n^2(t)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\lim_{t\to t_0} (f_1^2(t) + \dots + f_n^2(t))\right]^{1/2} = \left[\left(\lim_{t\to t_0} f_1(t)\right)^2 + \dots + \left(\lim_{t\to t_0} f_n(t)\right)^2\right]^{1/2}$$

Por la continuidad de $\sqrt{\ }$

$$= \left[a_1^2 + \dots + a_n^2\right]^{1/2} = \|a\|$$

$$\therefore \lim_{t\to t_0} \|f(t)\| = \|a\| \ \blacktriangle$$

30/01/2014

Ejercicio

Se sabe que $\lim_{t\to 2}(t,t^3)=(2,8)$

Determinar $\delta>0$ que verifique la validez del límite.

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta_1,\delta_2 \ \ni$ si $0<|t-2|<\delta_1 \Rightarrow |t-2|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y además, si $0<|t-2|<\delta_2 \Rightarrow |t^3-8|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. $\Rightarrow$ si tomo $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$

$$\Rightarrow \|(t,t^3)-(2,8)\| = \sqrt{(t-2)^2+(t^3-8)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \varepsilon$$

siempre que $0<|t-2|<\delta$

$\therefore \lim_{t\to 2}(t,t^3)=(2,8)$

// Nota: las expresiones para δ_1 y δ_2 pueden ser las siguientes: $\delta_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ y $\delta_2=\min\{1,\frac{\varepsilon}{25\sqrt{2}}\}$ //

Funciones Acotadas

Se dice que una función $f(t)$ es acotada en un intervalo I si $\exists M>0,\ M\in\mathbb{R} \ni \|f(t)\|<M \quad \forall t\in I$.

Ejercicio

Demostrar que si $\lim_{t\to t_0} f(t)=L \Rightarrow f$ es acotada en $0<|t-t_0|<\delta$

Dem.

Sabemos que $f(t)\to L$ cuando $t\to t_0$, $\Rightarrow \forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0 \ni$ $\|f(t)-L\|<\varepsilon$ siempre que $0<|t-t_0|<\delta$.

$$\Rightarrow \|f(t)\| = \|f(t)-L+L\| \le \|f(t)-L\|+\|L\| < \varepsilon+\|L\|$$

$\therefore$ basta con tomar $M=\varepsilon+\|L\|$ ▲

Ejercicio

Si $f(t)$ es acotada en t_0 y $g(t)\to 0$ cuando $t\to t_0$, demostrar que $f(t)\times g(t)\to 0$ cuando $t\to t_0$.

Dem.

Sea $\varepsilon>0$ arbitrario, como $f(t)$ es acotada en $t_0 \Rightarrow \exists M>0$ y un $\delta_1>0 \ni \|f(t)\|<M$.

Por otro lado, si $g(t)\to 0$ cuando $0<|t-t_0|<\delta_2 \Rightarrow$ $\|g(t)-0\|=\|g(t)\|<\frac{\varepsilon}{M}$. Por lo que al tomar $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ se tiene que si $0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow 0<|t-t_0|<\delta_1$ y $0<|t-t_0|<\delta_2$.

$\therefore \|f(t)\times g(t)-0\|=\|f(t)\times g(t)\|=\|f(t)\|\|g(t)\||\operatorname{sen}(f,g)|$

$\leq \|f(t)\|\|g(t)\|<\cancel{M}\frac{\varepsilon}{\cancel{M}}=\varepsilon$

$\therefore f(t)\times g(t)\to 0$ cuando $t\to t_0$ ▲