20/05/2014

Teorema

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\exists$ en una bola B con centro en el pto. crítico $(x_0, y_0) \in U$ sus derivadas parciales de 2º orden son continuas.

Sea:

$A = \partial_x^2 f(p)$, $B = \partial_{xy}^2 f(p)$ y $C = \partial_y^2 f(p)$

a) Si $B^2 - AC < 0$ y $A > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en p.

b) Si $B^2 - AC < 0$ y $A < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en p.

c) Si $B^2 - AC > 0 \Rightarrow f$ tiene un pto. silla en p.

d) Si $B^2 - AC = 0 \Rightarrow$ no se sabe la naturaleza de p.

Analizar las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2$

b) $f(x,y) = (x^2+y^2)\, e^{-(x^2+y^2)}$

c) $f(x,y) = 2x - 3y + \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 5\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\quad f: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$

d) Calcular la distancia más corta entre el plano $x+y+z=3$ y el pto. $p=(2,3,1)$

Sol.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 8x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0, \pm 1$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4y = 0 \Rightarrow y = 0, \pm 1$

$\Rightarrow$ tenemos 9 ptos. críticos, a saber
$p_1 = (0,0)$, $p_2 = (0,1)$, $p_3 = (0,-1)$,
$p_4 = (1,0)$, $p_5 = (-1,0)$, $p_6 = (1,-1)$,
$p_7 = (1,1)$, $p_8 = (-1,1)$, $p_9 = (-1,-1)$

$\Rightarrow \partial_x^2 f = 24x^2 - 8$

$\partial_{xy}^2 f = 0$

$\partial_y^2 f = 12y^2 - 4$

Punto crítico	A	B	C	B^2-AC	Naturaleza del punto.
P_1	-8	0	-4	-32	$(0,0)$ es un máximo.
P_2	-8	0	8	64	$(0,1)$ es un pto. silla.
P_3	-8	0	8	64	$(0,-1)$ es un pto. silla.
P_4	16	0	-4	64	$(1,0)$ es un pto. silla.
P_5	16	0	-4	64	$(-1,0)$ es un pto. silla.
P_6	16	0	8	-128	$(1,-1)$ es un mínimo.
P_7	16	0	8	-128	$(1,1)$ es un mínimo.
P_8	16	0	8	-128	$(-1,1)$ es un mínimo.
P_9	16	0	8	-128	$(-1,-1)$ es un mínimo.

b) haciendo $r = x^2+y^2 \Rightarrow f(x,y) \to f(r) = re^{-r}$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = (1-r)e^{-r}(2x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = (1-r)e^{-r}(2y) \end{aligned}\right\} \text{Este sistema de ec. se hace 0 en } (0,0) \text{ y en } r=1$$

$$\Rightarrow \partial^2_x f = -e^{-r}(4x^2) - (1-r)e^{-r}(4x^2) + 2(1-r)e^{-r}$$

$$\partial^2_{xy} f = -e^{-r}(4xy) - (1-r)e^{-r}(4xy)$$

$$\partial^2_y f = -e^{-r}(4y^2) - (1-r)e^{-r}(4y^2) + 2(1-r)e^{-r}$$

Evaluando en $(0,0)$ se tiene que $r=0$

$\Rightarrow A=2,\ B=0,\ C=2 \qquad \Rightarrow B^2-AC = -4 < 0$ y $A = 2 > 0$

$\Rightarrow (0,0)$ es un mínimo de f y vale $f(0,0) = 0$.

Por otro lado, cuando $r=1$ tenemos

$A = -4x^2e^{-1}$, $B = -4xye^{-1}$, $C = -4y^2e^{-1}$ $\Rightarrow B^2-AC = 16x^2y^2e^{-2} - 16x^2y^2e^{-2} = 0$

20/05/2014

con lo cual no se sabe la naturaleza de todos los $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ $\ni$ $x^2+y^2=1=r$.

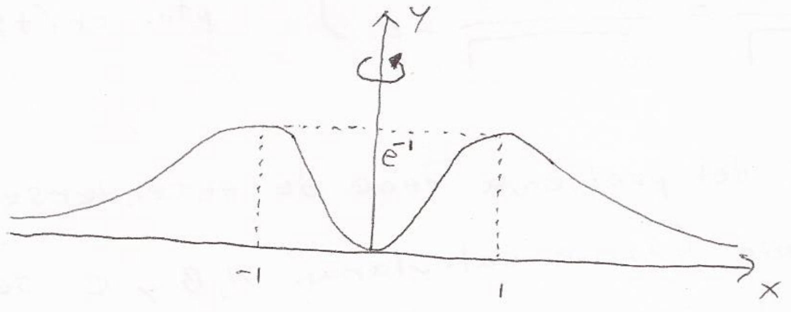
Ahora, si no se considera la dependencia de $r=r(x,y)$ y se trabajo sólo con $f(r)=re^{-r}$

$$\Rightarrow \partial_r f=(1-r)e^{-r}=0$$ en donde el pto. crítico es $r=1$

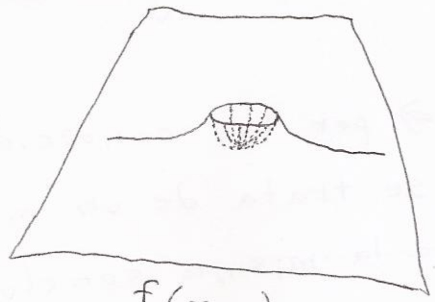
$$\Rightarrow \partial_r^2 f(1)=-e^{-r}-(1-r)e^{-r}\Big|_{r=1}=-e^{-1}<0$$ por lo cual $r=1$ tiene que ser un máximo de f y vale $f(1)=e^{-1}$

$\therefore$ $r=1=x^2+y^2$ tienen que ser una infinidad de máximos locales.

De hecho, $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ es en realidad una superficie de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje y la curva $y=x^2e^{-x^2}$.



$\Rightarrow$



$f(x,y)$

c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2+\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{5y}{x^2(1+(\frac{y}{x})^2)}=\frac{2(x^2+y^2)+x-5y}{x^2+y^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-3+\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{5}{x(1+(\frac{y}{x})^2)}=\frac{-3(x^2+y^2)+y+5x}{x^2+y^2}=0$$

$\Rightarrow$ $p=(1,1)$ es un pto. crítico.

$$\Rightarrow \partial_x^2 f=\frac{(x^2+y^2)(4x+1)-(2(x^2+y^2)+x-5y)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_{xy}^2 f=\frac{(x^2+y^2)(-6x+5)-(-3(x^2+y^2)+y+5x)(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\partial_y^2 f=\frac{(x^2+y^2)(-6y+1)-(-3(x^2+y^2)+y+5x)(2y)}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow A = \frac{5}{2}, \quad B = -\frac{1}{2}, \quad C = -\frac{5}{2} \quad \Rightarrow B^2 - AC = \frac{13}{2} > 0 \quad \Rightarrow$ f tiene un pto. silla en $(1,1)$ y vale $f(1,1) = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{5\pi}{4} - 1$

d) La distancia de p a un pto. (x, y, z) está dado por

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$$

Ahora, para garantizar que (x,y,z) esté en el plano $\Rightarrow$ hay que sustituir z por $3-x-y$

$$\Rightarrow f(x,y) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (2-x-y)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x-2) - (2-x-y)}{\sqrt{\quad}} = \frac{2x+y-4}{\sqrt{\quad}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(y-3) - (2-x-y)}{\sqrt{\quad}} = \frac{2y+x-5}{\sqrt{\quad}} = 0$$

$\Rightarrow p = (1,2)$ es el pto. crítico

$\Rightarrow$ por las condiciones del problema debe de entenderse de que se trata de un mínimo (si se calcularan A, B y C se llega a la misma conclusión) $\Rightarrow$

$f(1,2) = \sqrt{3}$ es la mínima distancia del plano al pto. $(2,3,1)$

Si se realiza el mismo procedimiento para un plano $Ax + By + Cz + D = 0$ y para un pto. $p = (x_0, y_0, z_0)$ se obtiene la conocida fórmula:

$$d_{mín} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

20/05/2014

Repaso de eigenvalores, eigenvectores y diagonalización

$A\bar{x}=\lambda\bar{x}$ ecuación de valores propios, donde A es una matriz de $n\times n$, $\bar{x}$ es un vector de $n\times 1$ y λ representa al (los) valor(es) propio(s) de dicha ecuación.

También se puede escribir como $(A-\lambda I)\bar{x}=\bar{0}$ con I la matriz identidad de $n\times n$.

$\det(A-\lambda I)=P(\lambda)=$ polinomio característico $=0$

Para diagonalizar a A hay que aplicarle una transformación mediada por una matriz U, de la forma

$$U^{-1}AU=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$$

donde $U=\left(\boxed{\bar{v}_1}\ \boxed{\bar{v}_2}\cdots\boxed{\bar{v}_n}\right)$, donde $\bar{v}_i$ son los eigenvectores columna asociados a sus respectivos eigenvalores λ_i.

Calcular los eigenvalores, eigenvectores y la matriz U que diagonalice a las siguientes matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}1&3\\4&2\end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$

Sol.

a) $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&3\\4&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)-12=2-3\lambda+\lambda^2-12=\lambda^2-3\lambda-10$

$$=(\lambda-5)(\lambda+2)=0$$

$\therefore\ \underbrace{\lambda_1=5\ ,\ \lambda_2=-2}$

$\Rightarrow (A-\lambda_1 I)\bar{x}=\bar{0}$ es $\begin{pmatrix}-4&3\\4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow 4x_1-3x_2=0$ $\Rightarrow \underbrace{\bar{v}_1=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$

es el eigenvector asociado a $\lambda_1=5$

Para $\lambda_2 = -2$ tenemos

$$(A - \lambda_2 I)\bar{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ es el eigenvector asociado a λ_2.

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$ ya que

$$U^{-1}AU = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 & -2 \\ 20 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -35 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

b) $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0$$

$\therefore \lambda_1 = 3, \; \lambda_2 = -1$

$$\Rightarrow (A - \lambda_1 I)\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow -2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ es el eigenvector asociado a λ_1, y para λ_2

$$(A - \lambda_2 I)\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$ es el eigenvector asociado a λ_2.

$$\Rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$ ya que

$$U^{-1}AU = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

c) $$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\therefore \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 2, \; \lambda_3 = 3$

20/05/2014

$$\Rightarrow (A-\lambda_1 I)\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$ es el

eigenvector asociado a λ_1, para λ_2 tenemos

$$(A-\lambda_2 I)\bar{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$ es el

eigenvector asociado a λ_2, y para λ_3 tenemos

$$(A-\lambda_3 I)\bar{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} -2x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ es el

eigenvector asociado a λ_3.

$$\Rightarrow \underline{U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$, para encontrar la inversa procedemos por Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{R_1 \to R_1 - R_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_3 \\ R_1 \to R_1 + R_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ya que

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$