22/05/2014

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \partial^2_x f & \partial^2_{yx} f \\ \partial^2_{xy} f & \partial^2_y f \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial^2_x f & \partial^2_{yx} f & \partial^2_{zx} f \\ \partial^2_{xy} f & \partial^2_y f & \partial^2_{zy} f \\ \partial^2_{xz} f & \partial^2_{yz} f & \partial^2_z f \end{pmatrix}$$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$

$$H(x,y,z,u) = \begin{pmatrix} \partial^2_x f & \partial^2_{yx} f & \partial^2_{zx} f & \partial^2_{ux} f \\ \partial^2_{xy} f & \partial^2_y f & \partial^2_{zy} f & \partial^2_{uy} f \\ \partial^2_{xz} f & \partial^2_{yz} f & \partial^2_z f & \partial^2_{uz} f \\ \partial^2_{xu} f & \partial^2_{yu} f & \partial^2_{zu} f & \partial^2_u f \end{pmatrix}$$

donde H es el Hessiano de f.

Criterio con determinantes angulares para ptos. críticos

$A_1 = a_{11}$, $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\ldots$, $A_n = A$

Sea $\Delta_k \equiv \det A_k$

$\Rightarrow$ a) Si $\Delta_k > 0$ $\forall k$ $\Rightarrow f$ tiene un mínimo local en P.

b) Si $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0, \ldots$ (alternando signos y el 1ero. negativo) $\Rightarrow f$ tiene un máximo local en P.

Criterio con eigenvalores para ptos. críticos

a) Si $\lambda_i > 0$ $\Rightarrow f$ tiene un mínimo local en P.

b) Si $\lambda_i < 0$ $\Rightarrow f$ tiene un máximo local en P.

c) Si $\lambda_i > 0$, $\lambda_j < 0$ con $i \neq j$ $\Rightarrow f$ tiene un pto. silla en P.

Analizar la naturaleza de los ptos. críticos de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = 2(x-1)^2 + 3(y-2)^2$

b) $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(x+y+z)$

c) $f(x,y,z,u) = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{u}{z} + \frac{1}{u}$

d) $f(x,y,z) = e^{-x^2} + e^{-y^2} + z^2$

e) $f(x,y) = ax^2 + by^4$

Sol.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4(x-1) = 0$
$\frac{\partial f}{\partial y} = 6(y-2) = 0$ $\Rightarrow p = (1,2)$ es pto. crítico.

$\Rightarrow H(p) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = 4 > 0 \\ \Delta_2 = 24 > 0 \end{matrix} \Rightarrow$ (1,2) es un mínimo de f con valor de $f(1,2) = 0$.

Con eigenvalores tenemos

$\det(H(p) - \lambda I) = (4-\lambda)(6-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4 > 0, \lambda_2 = 6 > 0 \Rightarrow$ (1,2) es un mínimo.

b)

$H(p) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ con $p = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{matrix} \Delta_1 = -2 \\ \Delta_2 = 3 \\ \Delta_3 = -4 \end{matrix} \Rightarrow$ p es un máximo de f con valor de $f(p) = 4$ (como se vió en clase)

Ahora, analicémoslo por eigenvalores:

$$\det(H(p) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left[(-2-\lambda)^2 - 1\right] - (-1)\left[2+\lambda-1\right] - \left[1-2-\lambda\right]$$

$$= -(2+\lambda)^3 + 2 + \lambda + 2 + \lambda - 1 - 1 + 2 + \lambda = -(2+\lambda)^3 + 3\lambda + 4$$

$$= -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 + 3\lambda + 4 = -(\lambda^3 + 6\lambda^2 + 9\lambda + 4) = 0$$

22/05/2014

$\Rightarrow \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda+4=0$ 4 es divisible por $\pm1, \pm2, \pm4$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 9 & 4 \\ & & -1 & -5 & -4 \\ \hline & 1 & 5 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & -4 & \\ \hline & 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ -1 es raíz doble del polinomio

$\therefore P(\lambda) = (\lambda+1)^2(\lambda+4)=0$

$\Rightarrow \lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -4 < 0$ $\Rightarrow$ efectivamente $p=(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es un máximo de f.

c)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 1 - \frac{y}{x^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{y} - \frac{u}{z^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{1}{z} - \frac{1}{u^2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow p=(1,1,1,1) \text{ es un pto. crítico}$$

$$\Rightarrow H(p) = \begin{pmatrix} \frac{2y}{x^3} & -\frac{1}{x^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{x^2} & \frac{2z}{y^3} & -\frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} & \frac{2u}{z^3} & -\frac{1}{z^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2}{u^3} \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \Delta_1 &= 2 > 0 \\ \Delta_2 &= 3 > 0 \\ \Delta_3 &= 4 > 0 \\ \Delta_4 &= 5 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $(1,1,1,1)$ es un mínimo local de f y vale $f(p) = 5$

Este problema no se realizará por el criterio de los eigenvalores, debido a su grado de complejidad, pues involucra la búsqueda de raíces de un polinomio de grado 4.

d) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=-2x e^{-x^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=-2y e^{-y^2}=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial z}=2z=0\end{array}\right\} \Rightarrow p=(0,0,0)$ es el pto. crítico.

$$\Rightarrow H(p)=\begin{pmatrix}-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2} & 0 & 0\\ 0 & -2e^{-y^2}+4y^2e^{-y^2} & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}_p=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\Delta_1=-2<0\\ \Delta_2=4>0\\ \Delta_3=8>0\end{array} \Rightarrow ?$$

Si se hace por eigenvalores

$\det(H(p)-\lambda I)=(-2-\lambda)^2(2-\lambda)=0 \quad \Rightarrow \lambda_1=-2<0,\ \lambda_2=2>0$

$\Rightarrow (0,0,0)$ es un pto. silla de f, con valor de $f(p)=2$

e) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2ax=0\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=4by^3=0\end{array}\right\} p=(0,0)$ es el pto. crítico

$$\Rightarrow H(p)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 12by^2\end{pmatrix}_p=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l}\Delta_1=2a\\ \Delta_2=0\end{array} \Rightarrow ?$$

Por eigenvalores

$\det(H(p)-\lambda I)=-\lambda(2a-\lambda)=0 \quad \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_1=0\\ \lambda_2=2a\end{array} \Rightarrow ?$

Si $a=b=1 \Rightarrow f(x,y)=x^2+y^4$ tiene un mínimo en p, pues $\forall$ bola con centro en el origen $f(x,y)\geq 0=f(p)$.

Si $a=b=-1 \Rightarrow f(x,y)=-x^2-y^4$ tiene un máximo en p, pues $\forall$ bola con centro en el origen $f(x,y)\leq 0=f(p)$.

22/05/2014

Si $a=-1$, $b=1$ $\Rightarrow$ $f(x,y)=-x^2+y^4$ tiene un pto. silla en p, pues $\forall$ bola, digamos $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<\varepsilon^2\}$ se tienen ptos. $(r,0)$, $(0,s)$ de modo que

$f(r,0)=-r^2<0=f(p)$ (con $r^2<\varepsilon^2$) y

$f(0,s)=s^4>0=f(p)$ (con $s^2<\varepsilon^2$)

$\therefore$ no se sabe la naturaleza de p, pues depende de los signos de a y b.