11/02/2014

Reparametrizaciones

1) Reparametrizar $f(t)=(t,t^2)$ con $t\in[-1,1]$

$f(t)=(3t+2,t^3+3)$ con $t\in[0,2]$

$f(t)=(te^t,e^{-t},t)$ con $t\in[0,3]$

a) $f(t)=(t,t^2)$ con $t\in[-1,1]$

sea $t=\varphi(s)=-\cos(s)$

$\Rightarrow g(s)=f\circ\varphi(s)=(-\cos(s),\cos^2(s))$ con $s\in[0,\pi]$

pues cuando $t=-1\rightarrow s=0$ y

" $t=1\rightarrow s=\pi$

b) $f(t)=(3t+2,t^3+3)$ con $t\in[0,2]$

sea $t=\varphi(s)=2s$

$\Rightarrow g(s)=(6s+2,8s^3+3)$ con $s\in[0,1]$

pues cuando $t=0\rightarrow s=0$ y

" $t=2\rightarrow s=1$

c) $f(t)=(te^t,e^{-t},t)$ con $t\in[0,3]$

sea $t=\varphi(s)=\ln s$

$\Rightarrow g(s)=(s\ln s,\frac{1}{s},\ln s)$ con $s\in[1,e^3]$

pues cuando $t=0\rightarrow s=1$ y

" $t=3\rightarrow s=e^3$

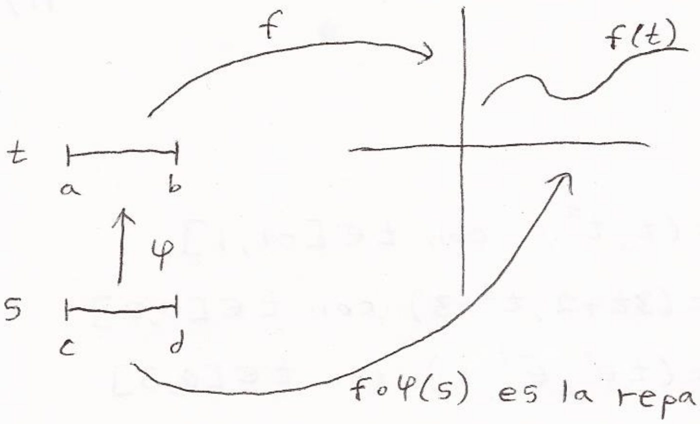
•) Sea $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}^2$ la curva $f(t)=(t^2+1,t^3+3t+2)$.
Sea $\varphi(s):[-1,1]\rightarrow[0,1]$ una función con derivada continua, sobreyectiva y $\ni$ $\varphi'(s)>0$ $\forall s\in[-1,1]$. Si $\varphi(0)=\frac{1}{2}$ y $\varphi'(0)=2$, obtenga el vector velocidad de la reparametrización $g=f\circ\varphi$ para $s=0$.

Si $g(s)=f\circ\varphi(s)$

$\Rightarrow g'(s)=f'\circ(\varphi(s))\cdot\varphi'(s)$ y $g'(0)=f'\circ(\varphi(0))\cdot\varphi'(0)$

$f'(t)=(2t,3t^2+3)$ $\Rightarrow$ $f'\circ(\varphi(0))=f'(\frac{1}{2})=(1,\frac{15}{4})$

$\Rightarrow g'(0)=2(1,\frac{15}{4})=\underline{(2,\frac{15}{2})}$



$f \circ \varphi(s)$ es la reparametrización.

Parametrización por longitud de arco.

$$\int \|f'(t)\|\,dt = s$$

a) $f(t) = (t, \cosh t)$ con $t \in [0,3]$

$$f'(t) = (1, \operatorname{senh} t) \Rightarrow \int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\,dt = \int \sqrt{\cosh^2 t}\,dt = \int \cosh t\,dt = \operatorname{senh} t = s$$

$$\therefore \operatorname{senh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = s \Rightarrow e^t - \frac{1}{e^t} = 2s \Rightarrow \frac{e^{2t}-1}{e^t} = 2s \Rightarrow e^{2t} - 2se^t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^t = \frac{2s \pm \sqrt{4s^2+4}}{2} = s \pm \sqrt{s^2+1}$$

Tomando la solución positiva, ya que $e^t > 0 \ \forall t$

$$\Rightarrow e^t = s + \sqrt{s^2+1} \Rightarrow t = \ln(s + \sqrt{s^2+1})$$

$$\therefore \quad g(s) = \left(\ln(s+\sqrt{s^2+1}),\ \cosh(\ln(s+\sqrt{s^2+1}))\right) \quad \text{con} \quad s \in [0, \operatorname{senh} 3]$$

b) $f(t) = (2e^t, e^t, 4e^t)$ con $t \in [0, \ln \pi]$

$$f'(t) = (2e^t, e^t, 4e^t)$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{4e^{2t} + e^{2t} + 16e^{2t}}\,dt = \sqrt{21}\int e^t\,dt = \sqrt{21}\,e^t = s$$

$$\Rightarrow t = \ln\left(\frac{s}{\sqrt{21}}\right) \qquad \therefore \quad g(s) = \left(\frac{2s}{\sqrt{21}}, \frac{s}{\sqrt{21}}, \frac{4s}{\sqrt{21}}\right) \quad \text{con} \quad s \in [\sqrt{21}, \sqrt{21}\,\pi]$$

11/02/2014

Ejercicio

La curva $F(t)=(t, t^2 sen(\frac{1}{t}))$ con $t\in[0,1]$ es rectificable?

$f_1(t)=t$ es una función continua, derivable y monótona en $[0,1]$,

$\therefore f_1(t)$ es de variación acotada.

Para $f_2(t)=t^2 sen(\frac{1}{t})$ necesitamos checar la continuidad en $t=0$.

Sabemos que $-1\leq sen(\frac{1}{t})\leq 1 \Rightarrow -t^2\leq t^2 sen(\frac{1}{t})\leq t^2$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} -t^2 \leq \lim\limits_{t\to 0} t^2 sen(\frac{1}{t}) \leq \lim\limits_{t\to 0} t^2$ y como $\lim\limits_{t\to 0} \pm t^2 = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to 0} t^2 sen(\frac{1}{t}) = 0 \quad \therefore \quad \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ + \text{ si } 0<|t-0|<\delta$

$\Rightarrow |t^2 sen(\frac{1}{t})-0|<\varepsilon$, Ahora:

$|t^2 sen(\frac{1}{t})-0| = |t^2 sen(\frac{1}{t})| \leq |t^2| = |t|^2 = |t-0|^2 < \varepsilon$ $\therefore$ basta con tomar $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ para que todo se cumpla.

$\Rightarrow$ definimos $f_2(0) = t^2 sen(\frac{1}{t})\big|_{t=0} = 0$ para resolver el problema de la continuidad en 0.

Ahora necesitamos ver que la derivada esté acotada, i,e $|f_2(t)|\leq M$ $\forall t\in(0,1)$.

$|f_2'(t)| = |2t sen(\frac{1}{t}) + t^2 cos(\frac{1}{t})(-\frac{1}{t^2})| = |2t sen(\frac{1}{t}) - cos(\frac{1}{t})|$

$\leq |2t sen(\frac{1}{t})| + |-cos(\frac{1}{t})| \leq |2t| + 1 \leq 3$, pues $t\in(0,1)$ $\therefore |f_2'(t)|$ está acotada. $\therefore f_2(t)$ es de variación acotada.

Como $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son de variación acotada $\therefore f(t)$ es rectificable.