13/02/2014

Son rectificables las siguientes curvas?

a) $F(t) = (t^2, t-1)$ con $t \in [0,1]$

b) $F(t) = (e^t, t)$ con $t \in [0,1]$

a) $f_1(t) = t^2$ es una función continua y derivable en $[0,1]$, a su vez también es monótona en $[0,1]$, $\therefore$ es de variación acotada.

$f_2(t) = t-1$ también es continua, derivable y monótona en $[0,1]$, $\therefore$ es de variación acotada.

$\therefore$ $F(t)$ es rectificable.

b) Análogo a a), tanto $f_1(t) = e^t$ y $f_2(t) = t$ son funciones continuas, derivables y monótonas en $[0,1]$, $\therefore$ son de variación acotada, $\therefore$ $F(t)$ es rectificable.

<u>Ejemplo</u> de una función NO rectificable

Sea $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in (0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y sea la partición

$$P = \left\{ 0 = x_0,\ x_1 = \frac{1}{n},\ x_2 = \frac{1}{n-1},\ \dots,\ x_i = \frac{1}{n-i+1},\ \dots,\ x_{n-1} = \frac{1}{2},\ x_n = 1 \right\}$$

P.D. $\sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ no es acotada.

$$f(x_i) = \sqrt{x_i}\cos\left(\frac{\pi}{x_i}\right) = \sqrt{\frac{1}{n-i+1}}\cos\left(\frac{\pi}{\frac{1}{n-i+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n-i+1}}\cos((n-i+1)\pi) = \frac{(-1)^{n-i+1}}{\sqrt{n-i+1}}$$

$$f(x_{i-1}) = \sqrt{x_{i-1}}\cos\left(\frac{\pi}{x_{i-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\cos\left(\frac{\pi}{\frac{1}{n-i+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\cos((n-i+2)\pi) = \frac{(-1)^{n-i+2}}{\sqrt{n-i+2}}$$

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| = \left| \frac{(-1)^{n-i+1}}{\sqrt{n-i+1}} - \frac{(-1)^{n-i+2}}{\sqrt{n-i+2}} \right| \quad \dots \text{①}$$

$n-i+1$ y $n-i+2$ son números consecutivos $\Rightarrow$ necesariamente uno es par y el otro es impar.

Si $n-i+1$ es par $\Rightarrow$ $n-i+2$ es impar $\therefore$ $① = \left|\frac{1}{\sqrt{n-i+1}} - \frac{(-1)}{\sqrt{n-i+2}}\right|$

$= \left|\frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}} \quad \cdots ②$

Si $n-i+1$ es impar $\Rightarrow$ $n-i+2$ es par $\therefore$ $① = \left|\frac{-1}{\sqrt{n-i+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\right|$

$= \left|-\left(\frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\right)\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}} = ②$

$\Rightarrow |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}$

$$\Rightarrow \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_i \left(\frac{1}{\sqrt{n-i+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-i+2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n-2}} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$> \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{2}{\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{1}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ veces}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$\Rightarrow \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})| > \sqrt{n}$ $\therefore$ NO es acotada para $n >> 1$

$\therefore$ $f(x)$ no es rectificable.

Encontrar el plano osculador Π_o de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(t) = (\operatorname{Sen} t, \operatorname{Cos} t, 1)$ en $t_o = -\frac{\pi}{2}$

b) $f(t) = (t^2, t, 1)$ en $t_o = 0$

c) $f(t) = (e^t, e^x, e^t)$ en $t_o = \ln \pi$

13/02/2014

a) $T = \frac{f'}{\|f'\|} = \frac{(\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)}{1} = (\cos t, -\operatorname{sen} t, 0)$

y $T(t_0) = (0,1,0)$

$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{(-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)}{1} = (-\operatorname{sen} t, -\cos t, 0)$

y $N(t_0) = (1,0,0)$

Ahora $B = T \times N = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1)$ y $P_0 = f(t_0) = (-1,0,1)$

$\Rightarrow \Pi_0 = (P - P_0) \cdot B = (x+1, y, z-1) \cdot (0,0,-1) = 1 - z = 0$

$\therefore$ el plano osculador Π_0 es $z = 1$

b) $T = \frac{f'}{\|f'\|} = \frac{(2t, 1, 0)}{\sqrt{4t^2+1}}$ y $T(t_0) = (0,1,0)$

$$N = \frac{T'}{\|T'\|} = \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{4t^2+1}} - \frac{8t^2}{(4t^2+1)^{3/2}}, \frac{-4t}{(4t^2+1)^{3/2}}, 0 \right)}{\sqrt{\frac{4}{4t^2+1} - \frac{32t^2}{(4t^2+1)^2} + \frac{64t^4}{(4t^2+1)^3} + \frac{16t^2}{(4t^2+1)^3}}}$$

y $N(t_0) = \frac{(2,0,0)}{2} = (1,0,0)$

y $B = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,-1)$, $P_0 = f(t_0) = (0,0,1)$

$\Rightarrow \Pi_0 = (x, y, z-1) \cdot (0,0,-1) = 1 - z = 0$

$\therefore$ el plano osculador Π_0 en $t_0 = 0$ es $z = 1$

c) $T = \dfrac{f'}{\|f'\|} = \dfrac{(e^t, 0, e^t)}{\sqrt{2}\, e^t} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ y $T(t_0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$

$N = \dfrac{T'}{\|T'\|} = (0, 0, 0)$ De aquí se ve que no se puede efectuar, ya que $\|T'\| = 0$, ahora, si trabajáramos sólo con $N = T'$

$\Rightarrow B = T \times N = (0, 0, 0)$ y $P_0 = (\pi, e^x, \pi)$

$\Rightarrow \Pi_0 = (x - \pi, y - e^x, z - \pi) \cdot (0, 0, 0) = 0 = 0$ y de $0 = 0$ no podemos obtener de manera explícita un plano osculador.

$\therefore \Pi_0 \nexists$