20/02/2014

Ejercicio

Sean $x^2+y^2=4$ y $z=1$ un cilindro y un plano, respectivamente

a) Parametrizar la intersección

b) Reparametrizarlo con $t=\varphi(s)=2s$

c) Parametrizarlo por longitud de arco

d) Verificar si es rectificable

e) Obtener $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$, planos osculador, normal y rectificable, curvatura y torsión en $t_0=0$.

a) Sea $y=t \Rightarrow x=\sqrt{4-t^2}$ $\therefore$ $f(t)=(\sqrt{4-t^2}, t, 1)$ con $t\in[-2,2]$

b) Si $t=2s \Rightarrow g(s)=f(\varphi(s))=(2\sqrt{1-s^2}, 2s, 1)$ con $s\in[-1,1]$

c) $f'(t)=\left(-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}, 1, 0\right)$ y $\|f'(t)\|=\sqrt{\frac{t^2}{4-t^2}+1}=\sqrt{\frac{\cancel{t^2}+4-\cancel{t^2}}{4-t^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-t^2}}$

$$\Rightarrow \int \|f'(t)\|\,dt = 2\int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = 4\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{4-4\operatorname{sen}^2\theta}} = 2\int \frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = 2\int d\theta = 2\theta$$

$t=2\operatorname{sen}\theta$

$dt=2\cos\theta\, d\theta$

$= 2\arcsen\frac{t}{2} = s$ ↑ parámetro.

$\Rightarrow t = 2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right)=\varphi(s)$

$\therefore$ $g(s)=f(\varphi(s))=\left(2\cos\left(\frac{s}{2}\right), 2\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), 1\right)$

con $s\in[-\pi,\pi]$

d) Analizando la curva parametrizada por longitud de arco, i.e

$g(s) = (2\cos(\frac{s}{2}), 2\operatorname{sen}(\frac{s}{2}), 1)$ en $s \in [-\pi, \pi] = I$

Claramente $g_1(s)$, $g_2(s)$ y $g_3(s)$ son funciones continuas en I. Por otro lado, $g_1'(s)$, $g_2'(s)$ y $g_3'(s)$ son acotadas en I abierto, a saber:

$|g_1'(s)| = |-\operatorname{sen}(\frac{s}{2})| \leq 1 \quad \forall s \in (-\pi, \pi)$
$|g_2'(s)| = |\cos(\frac{s}{2})| \leq 1 \quad \forall s \in (-\pi, \pi)$ y
$|g_3'(s)| = |0| = 0 \leq M$ con M arbitrario y $M \in \mathbb{R}^+$ $\forall s \in (-\pi, \pi)$

$\therefore$ g_1, g_2 y g_3 son de variación acotada

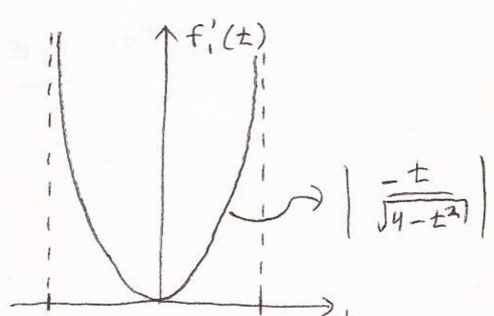
$\therefore$ $g(s)$ es rectificable.

La cuestión aparece cuando analizamos $f(t) = (\sqrt{4-t^2}, t, 1)$ con $t \in [-2, 2]$.

Para $f_2(t) = t$ tenemos que t es una función monótona, $\therefore$ es de variación acotada.

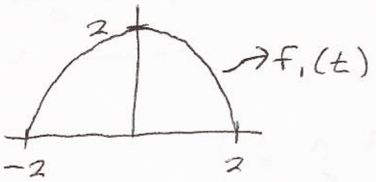
Para $f_3(t) = 1$ tenemos que es una función continua en $[-2,2]$ y $|f_3'(t)| = |0| = 0 \leq M$ con M arbitrario positivo, $\therefore$ es de variación acotada.

Pero ahora, para $f_1(t) = \sqrt{4-t^2}$ tenemos que es una función continua en $[-2,2]$, pero $|f_1'(t)| = \left|\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\right|$ NO es acotada en $(-2,2)$, ya que $\lim_{t \to \pm 2} \left|\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\right| \to \infty$



20/02/2014

$\therefore \nexists M$ por la que podamos acotar a $|f_1'(t)|$, $\therefore$ no es de variación acotada, $\therefore$ en apariencia $f(t)$ NO es rectificable, pero ¿cómo es posible que $f(t)$ no sea rectificable y $g(s)$ (parametrización por longitud de arco) sí lo sea, si ambas son la misma curva?

En la gráfica de $f_1(t)=\sqrt{4-t^2}$ 

, se observa que tiene longitud finita, entonces debe de ser rectificable, por lo cual no podemos aplicar el teorema que involucra a la variación acotada. Ahora bien, en teoría de curvas existe un teorema que dice lo siguiente: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}^3$, si $f(t)$ es continua en $[a,b]$, $f'(t)$ es continua en (a,b) y además $f'(t)\neq(0,0,0)$ $\forall t\in(a,b)$ $\Rightarrow$ $f(t)$ es rectificable; veamos:

$f(t)=(\sqrt{4-t^2}, t, 1)$ es continua en $[-2,2]$, pues f_1, f_2 y f_3 son continuas en $[-2,2]$.

$f'(t)=\left(\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}, 1, 0\right)$ es continua en $(-2,2)$, pues aunque $f_1'(t)$ diverja para valores próximos a ± 2, es una función continua en $(-2,2)$, y por último

$f'(t)\neq(0,0,0)$ $\forall t\in(a,b)$, ya que $f_2'(t)=1\neq 0$ $\forall t\in(a,b)$

$\therefore$ $f(t)=(\sqrt{4-t^2}, t, 1)$ es rectificable, en concordancia con $g(s)=\left(2\cos\left(\frac{s}{2}\right), 2\operatorname{Sen}\left(\frac{s}{2}\right), 1\right)$

e) $T(t)=\dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}=\dfrac{\left(-\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}, 1, 0\right)}{\frac{2}{\sqrt{4-t^2}}}=\left(-\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}, 0\right)$ y $T(t_0)=(0,1,0)$

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}, \quad T'(t) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{-t}{2\sqrt{4-t^2}}, 0\right)$$

$$\|T'(t)\| = \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{t^2}{4-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{\left(-\frac{1}{2}, \frac{-t}{2\sqrt{4-t^2}}, 0\right)}{\frac{1}{\sqrt{4-t^2}}} = \left(-\frac{\sqrt{4-t^2}}{2}, -\frac{t}{2}, 0\right) \quad \text{y } N(t_0) = (-1,0,0)$$

$$B(t_0) = T(t_0) \times N(t_0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

Ahora los planos, $P_0 = f(t_0) = (2,0,1)$

$\Pi_o = (P-P_0)\cdot B(t_0) = (x-2, y, z-1)\cdot(0,0,1) = z-1 = 0 \quad \therefore z = 1$

$\Pi_N = (P-P_0)\cdot T(t_0) = (x-2, y, z-1)\cdot(0,1,0) = y = 0 \quad \therefore y = 0$

$\Pi_R = (P-P_0)\cdot N(t_0) = (x-2, y, z-1)\cdot(-1,0,0) = 2-x = 0 \quad \therefore x = 2$

planos osculador, normal y rectificable.

Ahora bien, por simplicidad, tomamos a $g(s)$ (por longitud de arco) para calcular la curvatura y torsión.

$K(s) = \|g''(s)\|$, $g'(s) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), \cos\left(\frac{s}{2}\right), 0\right)$ y

$g''(s) = \left(-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), 0\right)$ $\quad \therefore K(s) = \frac{1}{2}$ y $K(0) = \frac{1}{2}$

Finalmente, $\tau(s) = -\dfrac{g'(s)\times g''(s)\cdot g'''(s)}{K^2(s)}$

$g'(s)\times g''(s) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$, $g'''(s) = \left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right), 0\right)$

$\Rightarrow g'(s)\times g''(s)\cdot g'''(s) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{2}\right), -\frac{1}{4}\cos\left(\frac{s}{2}\right), 0\right) = 0$

$\therefore \tau(s) = 0$ y $\tau(0) = 0$ lo que implica que $g(s)$ es una curva plana.