Punto de Acumulación

Definición: Sea A un subconjunto arbitrario de $\mathbb{R}^n$, se dice que $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A si toda bola abierta con centro $\bar{x}$ contiene un punto A distinto de $\bar{x}$. Dicho de otro modo si $\forall \quad r > 0$ se tiene que

$$B(\bar{x}, r) - \{\bar{x}\} \cap A \neq \varnothing$$

Al conjunto de puntos de acumulación de A se le denomina el conjunto derivado de A (A^a Notación).

Nota: Según la definición un punto de acumulación de A no necesariamente es punto de A. Un punto de la adherencia de A que no es elemento de A es un punto de acumulación de A. Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A entonces por definición, toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ tiene al menos un punto de A que no es $\bar{x}$.

Ejemplos :

1. Si $A = (a, b)$ entonces $A^a = [a, b]$
2. Si $A = [0, 1) \cup \{2\}$ entonces $A^a = [0, 1]$
3. Si $A = \left\{ \frac{1}{k} \middle| k \in \mathbb{N} \right\}$ entonces $A^a = \{0\}$
4. Si $A = \mathbb{Q}$ (Racionales) entonces $A^a = \mathbb{R}]$ (Reales)
5. Si $A = \mathbb{R}$ entonces $A^a = \mathbb{R}$

Ejemplos en $\mathbb{R}$:

a) El conjunto de puntos de acumulación de toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ es la bola cerrada $\bar{B}(\bar{x}, r)$.
b) El conjunto de puntos de acumulación de toda bola cerrada $\bar{B}(\bar{x}, r)$ es de ella misma.
c) Si $A = \underbrace{\mathbb{Q} \times \ldots \times \mathbb{Q}}_{\text{n-veces}}$ entonces $A^a = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$

Lema: $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es punto e acumulación de A si y solamente si $\bar{x} \in \overline{A - \{\bar{x}\}}$

Demostración: Si $\bar{x}$ es un punto de acumulación de A entonces $\quad \forall\, r > 0 \quad B(\bar{x}, r) - \{\bar{x}\} \cap A \neq \varnothing$ esta expresión es equivalente a

$$B(\bar{x}, r) \cap A - \{\bar{x}\} \neq \varnothing$$

por lo que

$$B(\bar{x}, r) \cap \{\bar{x}\}^c \cap A = [B(\bar{x}, r) \cap \{\bar{x}\}^c] \cap A = B(\bar{x}, r) \cap A - \{\bar{x}\} \neq \varnothing$$

pero esto significa que $\bar{x}$ es un punto de adherencia de $A - \{\bar{x}\}$
$\therefore \quad \bar{x} \in \overline{A - \{\bar{x}\}}$

Proposición: Si $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ es un punto de acumulación de A, entonces toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contiene una infinidad de puntos de A.

Demostración: Sea $B(\bar{x}, r)$ una bola abierta arbitraria con centro $\bar{x}$, supongase que esta bola tuviese solamente un número finito de puntos de A, digamos $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ cada uno distinto de $\bar{x}$ elijamos $r_0 = \min\{d(\bar{x}, \bar{x}_1), \ldots, d(\bar{x}, \bar{x}_k)\} \therefore \quad d(\bar{x}, \bar{x}_i) \leq r$.

Consideremos ahora la bola abierta $B(\bar{x}, r_0)$. Es claro que $B(\bar{x}, r_0) \subset B(\bar{x}, r)$ y de la desigualdad se sigue que $B(\bar{x}, r_0)$ no contiene puntos de A distintos de $\bar{x}$ pues todo punto de A que estubiese en $B(\bar{x}, r_0)$ tambien seria elemenro de $B(\bar{x}, r)$ lo cual no es posible ya que $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ son los únicos elementos de A que estan en $B(\bar{x}, r)$. Entonces la bola abierta $B(\bar{x}, r_0)$ no tiene puntos de A diferentes de $\bar{x}$, esto contradice la hipotesis de que $\bar{x}$ es punto de acumulación.

Teorema: Un conjunto A es cerrado si y solo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Demostración: Sea $\bar{x}$ un punto de acumulación de A. si $\bar{x} \notin A$, el conjunto abieto A^c es una vecindad de $\bar{x}$, que debe contener cuando menos un punto de A, pero esto no es posible, por lo tanto se concluye $x \in A$.

Inversamente: Si A contiene a todos sus puntos de acumulación se habra de probar que A^c es abierto.
Sea $y \in A^c$ entonces y no es punto de acumulación de A. Por lo tanto, existe una vecindad r de y tal que $A \cap v = \varnothing$.
En consecuencia $v_y \subset A^c$. Dado que esto es valido $\forall\, y \in A^c$ se deduce que A^c es abierto
$\therefore$ A es cerrado.

Celdas Nidificadas y el Teorema de Bolzano- Weierstrass

Una sucesión de conjuntos $\{A_n\}$ en un espacio métrico X, es decreciente si $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, ,2, ,3 \ldots\ldots$
Una sucesión decreciente de intervalos cerrados $\{I_n\}$, es una sucesión nidificada

Ejemplo La sucesión $\left[-\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right]$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es una sucesión nidificada.

Ejemplo Las bolas cerradas $\left\{B\left(x, \frac{1}{n}\right)\right\}$,con centro en x, y radio positivo $\dfrac{1}{n}$, forman una sucesión nidificada.

Definición 1. *Una celda abierta en* $\mathbb{R}$ *es el conjunto*

$$(a, b) = \{\overline{x} \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

Una celda cerrada en $\mathbb{R}$ *es el conjunto*

$$[a, b] = \{\overline{x} \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$$

Ejemplo El producto cartesiano $[a, b] \times [c, d]$ es una celda en $\mathbb{R}^2$ que se le llama rectángulo

Ejemplo El producto cartesiano $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ es una celda en $\mathbb{R}^3$ que se le llama paralelepipedo

Definición 2. *Una Celda abierta* $J \in \mathbb{R}^n$ *es el producto cartesiano*

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

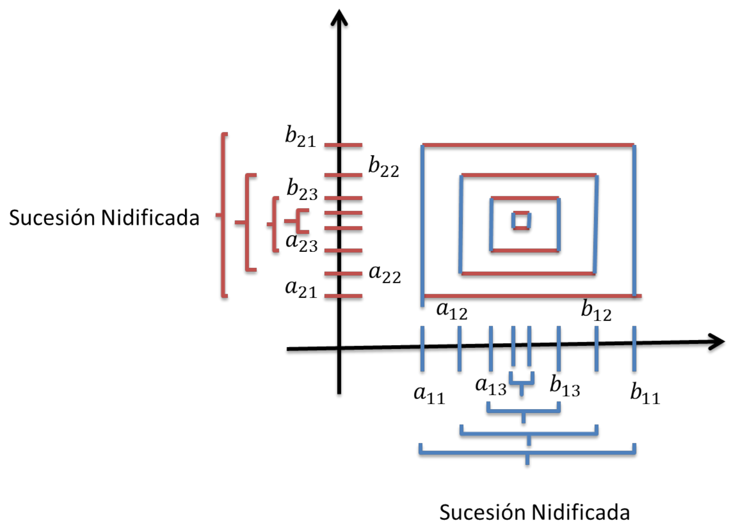
de n *celdas abiertas de números reales*

$$J = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i\ ,\ i = 1, \cdots, n\}$$

Definición 3. *Un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es acotado si esta contenido en alguna celda*

Teorema 1. *(Celdas Nidificadas) Sea $\{I_k\}$ una sucesión de celdas no vacia en $\mathbb{R}^n$ nidificada en el sentido $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset, \cdots \supset I_n$. Entonces, existe un punto en $\mathbb{R}^n$ que pertenece a todas las celdas.*

Demostración. Sea $I_k = \{(x_1, x_2, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^n \mid a_{k_j} \leq x_i \leq b_{k_j}\ k, j = 1, \cdots n\}$



Cada celda $[a_{kj}, b_{kj}]$ $k, j \in \mathbb{N}$ forman una sucesión nidificada de números reales y por la completación de números reales existe un y_m que pertenece a cada celda. Aplicando este razonamiento a cada celda se tiene un punto $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ que pertenece al producto cartesiano de todas las celdas.

Teorema 2. *Bolzano-WeierstrasTodo subconjunto infinito acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene un punto de acumulación*

□

Definición: Familias de conjuntos Si tenemos dos conjuntos A y B, al conjunto cuyos elementos son estos conjuntos, lo llamaremos COLECCION O FAMILIA de conjuntos y se representa con la notación

$$\{A, B\}$$

Si una familia tiene tres elementos (conjuntos) , digamos A_1, A_2 y A_3, se denota por

$$\{A_1, A_2, A_3\}$$

En general, si una familia de conjuntos tiene m elementos, la representamos por

$$\{A_1, A_2, ..., A_m\}$$

Lo cual podemos representar asi:

$$\Im = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$$

ó también

$$\Im = \{A_\alpha | \alpha = 1, 2, ..., m\}$$

(1) Si $\Im = \{A_\alpha | \alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos, definimos
La unión de la familia, como el conjunto

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | x \in A_\alpha, \quad p.a \quad \alpha \in I\}$$

(2)

(1) Si $\Im = \{A_\alpha | \alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos, definimos
La intersección de la familia, como el conjunto

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{x | x \in A_\alpha, \quad \forall \alpha \in I\}$$

.

Definición: Si $I = \{1, 2, ..., m\}$ podemos escribir

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha=1}^{m} A_\alpha$$

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha=1}^{m} A_\alpha$$

Proposición: Propiedades básicas de la familias de conjuntos

(1) Si A y B son subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, entonces $A \bigcup B$ y $A \bigcap B$ son abiertos

Demostración. Sea $\overline{x} \in A \cup B$. Se tiene entonces que $\overline{x} \in A$ ó $\overline{x} \in B$.
Si $\overline{x} \in A$, entonces, puesto que A es abierto existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subset A$, luego $B_r(\overline{x}) \subset A \cup B$
Si $\overline{x} \in B$, entonces, puesto que B es abierto existe $r > 0$ tal que $B_r(\overline{x}) \subset B$, luego $B_r(\overline{x}) \subset A \cup B$ □

En cualquiera de los casos, existe una bola abierta B_r contenida en $A \cup B$. $\therefore$ $A \cup B$ es abierto

(2) Si A y B son subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}^n$, entonces $A \bigcup B$ y $A \bigcap B$ son cerrados

Demostración. Ejercicio □

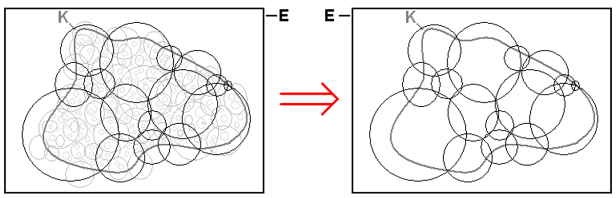
Proposición: Es una generalización de la proposición anterior de la familias de conjuntos

(1) La unión arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto
(2) La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto
(3) La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado
(4) La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado

Demostración. Ejercicio □

Conjuntos Compactos

Definición. Se dice que un conjunto K es compacto si siempre que esté contenido en la unión de una colección $g = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos, también esta contenido en la unión de algún número finito de conjuntos en g.



$$\left\{K \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_i\right\} \xRightarrow[\textit{Compacto}]{} \left\{K \subset \bigcup_{1}^{n} A_i\right\}$$

Una colección g de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K con frecuencia se llama cubierta de K. De modo que el requisito para que K sea compacto es que toda cubierta g de K se pueda sustituir por una cubierta finita g de K.