Funciones de Variación Acotada

Definición 1. *Sea f una función real en el intervalo $I = [a, b]$ y sea p una partición de I, $p = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n=b}\}$ entonces si todas las sumas*

$$\sum |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

son acotadas se dice que f tiene variación acotada sobre I. Se define como el supremo de los valores de las sumas tomadas sobre todas las particiones de I

$$v_f = sup \sum |f(t_k) - f(t_{k-1})|$$

Curvas Rectificables

Definición 2. *Para funciones vectoriales: Sea $f(t)$ una curva dada por $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ $t \in [a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$ $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n=b}\}$ la suma*

$$L_\Delta = \Sigma \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

es una aproximación a la longintud de la curva. Si los números L_Δ estan acotados para todas las particiones de $[a, b]$, entonces se dice que la curva C es rectificable y que la longitud de la curva esta dada por

$$L_C = sup \quad L_\Delta = sup \quad \Sigma \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

Si los números L_Δ no estan todos acotados se dice que la curva C no es rectificable.

Teorema 1. *Sea C una curva dada por $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ $t \in [a, b]$ una condición necesaria y suficiente para que C sea rectificable es que f_i $i = 1, ..., n$ tengan variación acotada*

Demostración. Necesidad. Supóngase que C es rectificable y que L_C existe y sea P cualquier partición de I. Entonces

$$|f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

Dado que un vector tiene una longitud mayor que cualquiera de sus componentes. Por lo tanto

$$\sum |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \sum \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq L_C$$

Por lo tanto f_i tiene variación acotada para toda i y para toda partición P de [a,b].
Suficiencia. Supongamos ahora que $f_1, ..., f_n$ tiene variación acotada esto significa que existe $vf_1, ..., vf_n$ por lo que

$$\|f_(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq |f_1(t_k) - f_1(t_{k-1})| + |f_2(t_k) - f_2(t_{k-1})| + ... + |f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})| \leq$$

$$vf_1 + vf_2 + ... + vf_n$$

Por lo tanto

$$\sum \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq \sum |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \sum vf_i$$

Por lo tanto $\sum \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\|$ esta acotada y por lo tanto f es rectificable □ □

Teorema 2. *Si f es monótona en [a,b], entonces f es de variación acotada en [a,b]*

Demostración. Sea f creciente. Entonces $\forall$ partición de [a,b] $f(t_k) - f(t_{k-1}) \geq 0$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) - f(t_{k-1}) = f(b) - f(a)$$

$\square$

Teorema 3. *Si f es una fución continua en [a,b] y existe f' y es ésta acotada en el interior de [a,b] $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in (a,b)$, entonces f es de variación acotada en [a,b]*

Demostración.

Dem: Por el teorema del valor medio

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1}) f'(t_k^*)$$

con $t_k^* \in (t_{k-1}, t_k)$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \, |f'(t_k^*)| \leq \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \, M = (b-a)M$$

por lo tanto f es de variación acotada $\square$

Ejemplo: Mostrar que la siguiente función vectorial (curva) $f(t) = [t, t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)]$ es rectificable

Solución: Tenemos que $f_1(t) = t$ es monotona y continua en [0,1] por lo tanto f_1 es de variación acotada. Para $f_2(t) = t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)$ vamos a checar continuidad. Para ello proponemos un $\delta = \sqrt{\epsilon}$ por lo que si

$$0 < |t - 0| < \delta \Rightarrow |t - 0| < \sqrt{\epsilon} \Rightarrow |t|^2 < \epsilon$$

Mientras que

$$|t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - 0| = |t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)| \leq |t^2| = |t|^2 < \epsilon$$

Por lo tanto $f_2(t)$ es continua en [0,1]. Ahora vamos a comprobar que $|f_2'(t)|$ esta acotada en [0,1], se tiene que

$$f_2(t) = t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) \Rightarrow f_2'(t) = 2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$$

Por lo tanto

$$|f_2'(t)| = |2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) - \cos\left(\frac{1}{t}\right)| \leq |2t \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right)| + |-\cos\left(\frac{1}{t}\right)| \leq |2t| + |-1| \leq 3$$

Por lo tanto $|f_2'|$ esta acotada y por lo tanto f_2' es de variación acotada. Finalmente como f_1 y f_2 son de variación acotada entonces la curva f es rectificable

Ejemplo: Mostrar que la siguiente función vectorial (curva) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = [t, t \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{t}\right)]$ donde $f(0) = (0,0)$ no es rectificable

Solución: En este caso tenemos que revisar cada una de las funciones componentes.

Para $x_1(t) = t$ en $[0,1]$ tenemos que x_1 es monotona creciente y según el resultado anterior, es de variación acotada.

Para $x_2(t) = t\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{t}\right)$ Ahora tomamos la partición

$$P = \left\{0 = x_0, x_1 = \frac{2}{k+1}, x_2 = \frac{2}{k}, ..., \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, x_n = \frac{2}{2} = 1\right\}$$

Por definición $f(x_0) = 0$ y para $x_i \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f\left(\tfrac{2}{2}\right) &= 1\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{\frac{2}{2}}\right) = 1\,\mathrm{sen}(\pi) = 0\\
f\left(\tfrac{2}{3}\right) &= \tfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{\frac{2}{3}}\right) = \tfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = -\tfrac{2}{3}\\
f\left(\tfrac{2}{4}\right) &= \tfrac{2}{4}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{\frac{2}{4}}\right) = \tfrac{2}{4}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{4\pi}{2}\right) = 0\\
f\left(\tfrac{2}{5}\right) &= \tfrac{2}{5}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{\frac{2}{5}}\right) = \tfrac{2}{5}\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{5\pi}{2}\right) = -\tfrac{2}{5}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| &= \left|0 - \left(-\frac{2}{3}\right)\right| + \left|-\frac{2}{3} - 0\right| + \left|0 - \frac{2}{5}\right| + \left|\frac{2}{5} - 0\right| + \cdots\\
&= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \frac{2}{7} + \cdots = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \cdots\right)\\
&> 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots\right)
\end{aligned}$$

esta última es la serie armónica la cual no converge a medida que n es suficientemente grande, por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ no es acotada y en consecuencia la función no es de variación acotada, por lo tanto la curva no es rectificable