Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 1. *Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es cualquier lista infinita de vectores en $\mathbb{R}^n$ $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}, ...$ algunos de los cuales o todos ellos pueden coincidir entre si.*
Dada una sucesión $\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k}, ...$ se define de manera natural una función de los enteros positivos $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que a cada entero positivo k se le asigna un vector $\overline{x_k} \in \mathbb{R}^n$

Convergencia de Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

Definición 2. *Una sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ se dice que converge a un vector $\overline{x}$ en $\mathbb{R}^n$ si*

$$\forall \quad \epsilon > 0 \quad \exists \quad N_0 \in \mathbb{N} \quad tal \quad que \quad \|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon \quad \forall k > N_0$$

En este caso diremos que la sucesión es convergente y que $\overline{x}$ es el limite de la suceción y escribimos

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = \overline{x}$$

Proposición 1. ***Unicidad del Limite*** *Consideremos una sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ en $\mathbb{R}^n$ y sean $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ tal que*

$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k} \quad y \quad \overline{y} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k}$$

entonces $\overline{x} = \overline{y}$

Demostración. Supongamos que $\overline{x} \neq \overline{y}$ y tomemos $\epsilon = \frac{1}{2}\|\overline{x} - \overline{y}\| > 0$.
Por definición
$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k}$ por lo que $\exists N_{0_x} \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ para $k > N_{0_x}$
y analogamente se tiene que
$\overline{y} = \lim_{k\to\infty} \overline{x_k}$ por lo que $\exists N_{0_y} \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{y}\| < \epsilon$ para $k > N_{0_y}$
Sea ahora $N_0 = máx\{N_{0_x}, N_{0_y}\}$ entonces se cumple simultaneamente que
$\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ y $\|\overline{x_k} - \overline{y}\| < \epsilon$ para $k > N_0$ $\therefore$

$$\|\overline{x} - \overline{y}\| = \|\overline{x} - \overline{x_k} + \overline{x_k} - \overline{y}\| \leq \|\overline{x} - \overline{x_k}\| + \|\overline{x_k} - \overline{y}\| < 2\epsilon = 2\left(\frac{1}{2}\|\overline{x} - \overline{y}\|\right) = \|\overline{x} - \overline{y}\| (falso)$$

□

Proposición 2. *Sea $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$ y sean*

$$\{\overline{x_{1_k}}\}_1^\infty = (x_{1_1}, x_{1_2}, ...)$$

$$\{\overline{x_{2_k}}\}_1^\infty = (x_{2_1}, x_{2_2}, ...)$$

$$\vdots$$

$$\{\overline{x_{n_k}}\}_1^\infty = (x_{n_1}, x_{n_2}, ...)$$

las sucesiones componentes de la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$. Entonces la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ converge a $\overline{x} = (x_1, x_2, ...)$ en $\mathbb{R}^n$ si y solo si para cada $j = 1, 2, ...$ se tiene que x_{n_j} converge a x_j

Demostración. Supóngase que la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ converge a $\overline{x} = (x_1, x_2, ...)$ esto quiere decir que $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ para $k > N_0$ y dado que

$$0 \leq |x_{j_k} - x_j| \leq \|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$$

entonces se tiene que

$$0 \leq |x_{j_k} - x_j| < \epsilon$$

lo que significa que

$$\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x_j$$

Reciprocamente, supongamos que para cada j

$$\lim_{k\to\infty} x_{j_k} = x_j$$

lo que significa que

$$|x_{j_k} - x_j| < \frac{\epsilon}{n}$$

$$\therefore \quad 0 \leq \|\overline{x_k} - \overline{x}\| \leq |x_{1_k} - x_1| + |x_{2_k} - x_2| + ... + |x_{n_k} - x_n| < \frac{\epsilon}{n} + \frac{\epsilon}{n} + ... + \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

$$\therefore \quad \lim_{k\to\infty} \overline{x_{j_k}} = \overline{x}$$

□

Ejemplo.-Consideremos la sucesión $\overline{x_k} = \left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right)$ tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \overline{x_{1_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0, \quad \lim_{k\to\infty} \overline{x_{2_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k}{k}}{\frac{k}{k} + \frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}} = 1$$

$\therefore \lim_{k\to\infty} \overline{x_k} = (0,1) = \overline{x}$
Ahora para comprobarlo tenemos que

$$\|\overline{x_k} - \overline{x}\| = \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right) - (0,1)\right\| = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \left(\frac{k}{k+1} - 1\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}} < \sqrt{\frac{2}{k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{k}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{2}}{k} < \epsilon \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{\epsilon} < k \quad \therefore \quad N_0 = \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}$$

$$\therefore \quad Si \quad k > N_0 \therefore entonces \quad \left\|\left(\frac{1}{k}, \frac{k}{k+1}\right) - (0,1)\right\| < \epsilon$$

Ejemplos.-Sea la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ dada por $\overline{x_k} = \left(k, \frac{1}{k}\right)$ cuyos elementos podemos listar como sigue:

$$\left\{(1,1), \left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), ...\right\}$$

Ejemplos.-Sea la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ dada por $\overline{x_k} = \left(\frac{k+1}{k+2}, \frac{1}{2^k}\right)$ cuyas sucesiones componentes son:

$$\overline{x_{1_k}} = \left(\frac{k+1}{k+2}\right) \quad \overline{x_{2_k}} = \left(\frac{1}{2^k}\right)$$

Ejemplos.-Sea la sucesión $\{\overline{x_k}\}_1^\infty$ dada por $\overline{x_k} = \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^k, \sqrt[k]{k}, \sqrt[k]{\frac{1}{k}}\right)$ cuyas sucesiones componentes son:

$$\overline{x_{1_k}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k \quad \overline{x_{2_k}} = \sqrt[k]{k} \quad \overline{x_{3_k}} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}}$$

Teorema 1. *Criterio de Cauchy Una condición necesaria y suficiente para que una sucesión $\{\overline{x}_n\}$ sea convergente es que para cada $r > 0$ exista un natural N tal que*

$$\|\overline{x}_p - \overline{x}_q\| < r$$

para cualesquiera $p, q > N$

Demostración. Sea $\overline{x}_k = (x_{k_1}, x_{k_2}, ..., x_{k_n})$
Suficiencia Supónga que para cada $r > 0$, exista un natural N tal que

$$\|\overline{x}_p - \overline{x}_q\| < r$$

para cualesquiera naturales $p, q > N$. Entonces de las desigualdades

$$|x_{p_j} - x_{q_j}| \leq \|\overline{x}_p - \overline{x}_q\|$$

las cuales son validas para todo $j = 1, ..., n$ y cualesquiera naturales p y q, obtenemos que las sucesiones x_{k_j} satisfacen la condición de cauchy para sucesiones en $\mathbb{R}$, por lo tanto deben converger.
Necesidad Supónga que para $j = 1, ..., n$ se tiene que $|x_{p_j} - x_{q_j}| < \dfrac{\epsilon}{n}$ por lo tanto si

$$\|\overline{x}_p - \overline{x}_q\| \leq |x_{p_1} - x_{q_1}| + |x_{p_2} - x_{q_2}| + \cdots + |x_{p_n} - x_{q_n}| < \frac{\epsilon}{n} + \cdots \frac{\epsilon}{n} = \epsilon$$

□

Teorema 2. *Si $\{\overline{x}_n\}$ es convergente entonces es acotada*

Demostración. Supongamos que $\{\overline{x}_n\}$ es una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$ y sea $\overline{x}$ su límite. Tenemos entonces por definición que para $r = 1$ existe un natural N tal que

$$\|\overline{x}_k - \overline{x}\| < 1 \quad \forall \ \ k \geq N$$

Pero

$$|\|\overline{x}_k\| - \|\overline{x}\|| \leq \|\overline{x}_k - \overline{x}\| \ \ \forall \ \ k \in \mathbb{N}$$

asi que

$$\|\overline{x}_k\| - \|\overline{x}\| \leq \|\overline{x}_k - \overline{x}\| < 1 \quad para \ \ k \geq N$$

de donde

$$\|\overline{x}_k\| \leq 1+ \leq \|\overline{x}\| \quad para \ \ k \geq N$$

Necesitamos que se cumpla $\|\overline{x}_k\| \leq M$ para ello elegimos

$$M = max\{\|\overline{x}_1\|, ..., \|\overline{x}_n\|, 1 + \|\overline{x}\|\}$$

□