Tarea 4
Cálculo Diferencial e Integral III
fecha de entrega: 14/Mar/14

1.-Demostrar lo siguiente
Proposición 5. La unión arbitraria de conjuntos arbiertos es un conjunto abierto, ie, si $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos abiertos $\Rightarrow A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es un conjunto abierto.

Proposición 6. La intersección finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto, ie, si $A_1, A_2, ..., Am$ son conjuntos abiertos entonces $A = \bigcap_{\alpha=1}^{m} A_a$ es un conjunto abierto.

Proposición 7. La unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, ie, si $A_1, A_2, ..., Am$ son conjuntos cerrados entonces $A = \bigcup_{\alpha=1}^{m} A_a$ es un conjunto cerrado.

Proposición 8. La intersección arbitraria de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, ie, si $\{A_\alpha | \alpha \in I\}$ es una familia de conjuntos cerrados $\Rightarrow A = \bigcap_{\alpha \in I} A_a$ es un conjunto cerrado.

Proposición 2. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se tiene que:

a) $(A \cup B)^a = A^a \cup B^a$

b) $(A \cup B)^a \subset A^a \cup B^a$

2.-Sea I el intervalo [0,1] en $\mathbb{R}$. Divídase el intervalo I en tres intervalos de longitud un 1/3. Sea A_1 el conjunto que resulta de quitarle al conjunto I el intervalo abierto de la parte media, es decir $A_1 = I - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, tenemos entonces $A_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ Dividamos ahora cada uno de los intervalos $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ en tres partes de longitud $\frac{1}{3^2}$ y sea A_2 el subconjunto de A_1 que resulta de quitarle a cada uno de estos intervalos, el intervalo abierto de la parte media, es decir

$$A_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

Continuando con este proceso, se obtiene “en el límite” un conjunto que se llama CONJUNTO DE CANTOR. Pruebe que este conjunto es cerrado.
3.- Pruebe que en $\mathbb{R}^n$

(a) la frontera de toda bola abierta es la esfera con el mismo radio y centro

(b) La frontera de toda bola cerrada es la esfera del mismo radio y centro.

(c) La frontera de toda esfera es ella misma.

4.-Diga cuál es la frontera $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}^2$, argumente su respuesta. ¿Cuál es el complemento de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$?
5.-Prueba que para toda $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y para toda $r > 0$

$$(B(\overline{x}, r))^a = B(\overline{x}, r)$$